ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ #7 (με υποδείξεις)

Άσκηση 1 Εστω $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}\ , \text{ για } x \neq 0 \\ 0\ , \text{ για } x = 0 \end{cases}$.

α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και βρείτε την $f'(0)$.

Υπόδειξη: Για να βρείτε τα ζητούμενα όρια πολλαπλασιαστε αριθμητή και παρονομαστή τού κλασματος με $(\cos x + 1)$.

Ασκηση 2. Βρείτε τήν κλίση τής εφαπτόμενης τών παρακάτω καμπυλών στα σημεία που δίδονται:

α) $(x+y)^3 + (x+y)^4 = x^2 + y^2 + 22$ στο σημείο $(1,1)$.

Υπόδειξη: $y'(1) = \frac{1}{21}$.

β) $x^2y^2 + 1 = x^2 + y^2$ στο σημείο $(2,1)$.

Υπόδειξη: $y'(2) = 0$.

γ) $3x^2 + xy + y^2 = 9$ στο σημείο $(1,2)$.

Υπόδειξη: $y'(1) = -\frac{8}{5}$.

δ) $\cos x + \sin y = xy$ στο σημείο $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Υπόδειξη: $y'(\pi/2) = -\frac{2}{\pi - 2}$.

Ασκηση 3. Έστω C η καμπύλη στο xy-επίπεδο που ορίζεται από τήν εξίσωση $x^2 - y^2 + 3x = 0$. Βρείτε το σημείο όπου η εφαπτόμενη ευθεία τής C στο σημείο $P = (1, -2)$ τέμνει τήν ευθεία $x + y = 1$.

Υπόδειξη: Εξίσωση εφαπτόμενης: $y + 2 = -\frac{5}{4}(x-1)$. Σημείο τομής $(1/9,\ -8/9)$.

Ασκηση 4. Βρείτε τόν αριθμό c ο οποίος αναφέρεται στον τύπο τού θεωρήματος τής μέσης τιμής $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ με $[a,b] = [0,1]$.

Υπόδειξη: $c = 1/2$. **β)** $f(x) = \sqrt{x-1}$ με $[a,b] = [1,3]$.

Υπόδειξη: $c = 1/2$.

Ασκηση 5. Με χρήση τού θεωρήματος τής μέσης τιμής δείξτε ότι

α) $|\sin b - \sin a| < |b - a|$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τό ΘΜΤ για την συνάρτηση $f(x) = \sin x$ στό διάστημα $[a,b]$.

β) $e^x > x + 1$, για $x > 0$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τό ΘΜΤ για την συνάρτηση $f(x) = x^x$ στό διάστημα $[0,x]$.

γ) $\ln x + 1 < x$, για $x > 1$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τό ΘΜΤ για την συνάρτηση $f(x) = \ln x$ στό διάστημα $[1,x]$.

Ασκηση 6. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μία λύση (ρίζα) στα δοσμένα διαστήματα:

α) $x^4 + 3x + 1 = 0$ στο διάστημα $[-2,-1]$.

Υπόδειξη: Η $f(x) = x^4 + 3x + 1$ είναι φθίνουσα και $f(-2) > 0$, $f(-1) < 0$.

β) $2x^3 - 3x^2 + 12x + 6 = 0$ στο διάστημα $[-1,0]$.

Υπόδειξη: Η $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x + 6$ είναι αύξουσα και $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$.

γ) $(x+1)\,3^{x+1} = 1$ στο διάστημα $[-1,0]$.

Υπόδειξη: Η $f(x) = (x+1)\,3^{x+1} - 1$ είναι αύξουσα και $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$.

δ) $a\sin x = x+1$ στο διάστημα $[-2,-1]$, όπου $0<a<1$.
Υπόδειξη: Η $f(x)=a\sin x - x - 1$ είναι φθίνουσα και $f(-2)>0$, $f(-1)<0$.

Άσκηση 7 Θεωρούμε τίς συναρτήσεις

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} x\sin(1/x),\ \text{αν } x\neq 0 \\ 0,\ \text{αν } x=0 \end{array} \right\}.$$

και

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{l} |x|,\ \text{αν } x\neq 0 \\ 1,\ \text{αν } x=0 \end{array} \right\}.$$

Δείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Όμως τό όριο $\lim_{x\to 0}(g(f(x))$ δέν υπάρχει (εξετάστε πού μηδενίζεται η συνάρτηση $f(x)$). Είναι οι παραπάνω συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x=0$;
Υπόδειξη: Η συνάρτηση $f(x)$ μηδενίζεται στά σημεία $x=\frac{1}{k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$ και στό $x=0$. Επομένως

$$g(f(x)) = \left\{ \begin{array}{l} |x\sin(1/x)|,\ \text{αν } x\neq 0,\ \ x\neq \frac{1}{k\pi} \\ 1,\ \text{αν } x=0,\ \ x=\frac{1}{k\pi} \end{array} \right\}.$$

Επειδή $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$ τότε σε οσοδήποτε μικρό διάστημα με κέντρο τό 0 η παραπάνω συνάρτηση παίρνει τιμές κοντα στο μηδέν όταν $x\neq\frac{1}{k\pi}$, αλλά όταν $x=\frac{1}{k\pi}$ παίρνει την τιμή 1. Συμπεράνατε από αυτό, χρησιμοποιώντας τον ορισμό τού ορίου, ότι τό όριο δεν υπάρχει. Οι συναρτήσεις δέν είναι παραγωγίσιμες στό $x=0$.

Πρόβλημα 1. Έστω $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Ορίζουμε τήν συνάρτηση $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$. Δείξτε ότι η παράγωγος $f'(x)$ έχει ακριβώς $n-1$ ρίζες.

Πρόβλημα 2. Έστω n φυσικός αριθμός. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$;

Πρόβλημα 3. Βρείτε όλες τίς λύσεις τής εξίσωσης $5^x = 3^x + 4^x$.

Σημείωση: Τά προβλήματα 1, 2 και 3 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στίς ώρες γραφείου μου να τα δούμε.