

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 8

Άσκηση 1. Σχεδιάστε τό γράφημα των παρακάτω συναρτήσεων και βρείτε τοπικά ακρότατα, ολικά ακρότατα, σημεία καμπής, οριζόντιες και κάθετες ασύμπτωτες.

α) $f(x) = (x - 1)^2(x + 2), x \in \mathbb{R}$.

β) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}, x \in \mathbb{R}$.

γ)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & \text{αν } x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & \text{αν } x > 1. \end{cases}$$

δ) $x^2\sqrt{9 - x^2}, x \in [-3, 3]$.

ε) $|x - x^2|, x \in [-2, 2]$.

Άσκηση 2. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ στα κάτωθι διαστήματα:

α) $[0, 2]$,

β) $[2, 3]$.

Άσκηση 3. Έχουν οι συναρτήσεις $f(x) = \sin \pi x$ και $g(x) = \sin 2\pi x$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0, 1)$;

Άσκηση 4. Μια μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από τό σημείο $(1, 2)$ τέμνει τόν x -άξονα στο σημείο $A(a, 0)$ με $a > 0$ και τόν y -άξονα στο σημείο $B(0, b)$ με $b > 0$. Έστω O η αρχή τών αξόνων. Βρείτε για ποιές τιμές τών a, b τό τρίγωνο AOB έχει ελάχιστο εμβαδόν.

Άσκηση 5. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δοχείο με όγκο 1000 cm^3 και με σχήμα κυλίνδρου, χωρίς καπάκι, με ένα υλικό που ζυγίζει 1 gr/cm^2 . Ποιές είναι οι διαστάσεις τού ελαφρότερου δοχείου;

Άσκηση 6. Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνεται με αέριο με ρυθμό $10 \text{ cm}^3/\text{sec}$. Πόσο γρήγορα αυξάνεται η ακτίνα τού μπαλονιού όταν τό μήκος της είναι 30 cm ;

Άσκηση 7. Ένα σημείο κινείται στην καμπύλη $3x^2 - y^2 = 12$ έτσι ώστε η y -συντεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό 6 m/sec . Με ποιό ρυθμό αλλάζει η x -συντεταγμένη του όταν τό $x = 4 \text{ m}$;

Άσκηση 8. Ένα τρίγωνο εγγεγραμμένο σε ένα κύκλο έχει ως βάση του τήν οριζόντια διάμετρο τού κύκλου. Δείξτε ότι τό τρίγωνο έχει μέγιστο εμβαδόν όταν είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 1: Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και ότι $(f(x))^2 = x$ για κάθε $x > 0$. Δείξτε ότι είτε $f(x) = x$ για κάθε $x > 0$, είτε $f(x) = -x$ για κάθε $x > 0$.

Πρόβλημα 2: Μια συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται άνω φραγμένη (αντιστ. κάτω φραγμένη) άν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $f(x) \leq M$, για κάθε $x \in I$ (αντιστ. $f(x) \geq M$, για κάθε $x \in I$). Η f λέγεται φραγμένη άν είναι και άνω και κάτω φραγμένη.

α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ δέν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη.

β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x+1} \sin \frac{1}{x}$ είναι φραγμένη αλλά δέν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

Πρόβλημα 3: Έστω $b \neq 0$ και n φυσικός. Θεωρούμε τήν εξίσωση $x^n + b^n = (x+b)^n$. Δείξτε ότι

α) αν το n είναι άρτιος η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση.

β) αν το n είναι περιττός η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις.

Σημείωση: Τά προβλήματα 1, 2 και 3 δέν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στίς ώρες γραφείου μου να τα δούμε.