ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ #8 (με υποδείξεις)

Ασκηση 1. Σχεδιάστε τό γράφημα των παρακάτω συναρτήσεων και βρείτε τοπικά ακρότατα, ολικά ακρότατα, σημεία καμπής, οριζόντιες και κάθετες ασύμπτωτες.

α) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

γ)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & \text{αν } x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & \text{αν } x > 1 \,. \end{cases}$$

δ) $x^2\sqrt{9-x^2}$, $x \in [-3,3]$.

ε) $|x - x^2|$, $x \in [-2,2]$.

Ασκηση 2. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή τής συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ στα κάτωθι διαστήματα:
α) $[0,2]$,
β) $[2,3]$.
Υπόδειξη: α) μέγιστη η $f(2)$ και ελάχιστη η $f(0)$. β) μέγιστη η $f(3)$ και ελάχιστη η $f(2)$.

Ασκηση 3. Έχουν οι συναρτήσεις $f(x) = \sin \pi x$ και $g(x) = \sin 2\pi x$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή στό διάστημα $(0,1)$;
Υπόδειξη: Η $f(x) = \sin \pi x$ έχει μόνο μέγιστη τιμή 1 στο $x = 1/2$. Η $g(x) = \sin 2\pi x$ έχει μέγιστη τιμή 1 στο $x = 1/4$ και ελάχιστη τιμή -1 στο $x = 3/4$.

Ασκηση 4. Μια μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από τό σημείο $(1,2)$ τέμνει τόν x-άξονα στο σημείο $A(a,0)$ με $a > 0$ και τόν y-άξονα στο σημείο $B(0,b)$ με $b > 0$. Έστω O η αρχή τών αξόνων. Βρείτε για ποιές τιμές τών a,b τό τρίγωνο AOB έχει ελάχιστο εμβαδόν.
Υπόδειξη: Τό εμβαδόν ως έκφραση τού a δίδεται από τήν συνάρτηση $E(a) = \frac{a^2}{a-1}$. Οι ζητούμενες τιμές είναι $a = 2$ και $b = 4$.

Ασκηση 5. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δοχείο με όγκο $1000\,\mathrm{cm}^3$ και με σχήμα κυλίνδρου, χωρίς καπάκι, με ένα υλικό που ζυγίζει $1\ \mathrm{gr/cm}^2$. Ποιές είναι οι διαστάσεις τού ελαφρότερου δοχείου;
Υπόδειξη: Αν R, h η ακτίνα βάσης και το ύψος, τότε $h = \frac{1000}{\pi R^2}$. Πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την $E(R) = \pi R^2 + 2\pi R h = \pi R^2 + \frac{2000\pi}{R}$. Ελάχιστο έχουμε στο $R = \frac{10}{\pi^{1/3}}$. Οπότε θα έχουμε $R = h = \frac{10}{\pi^{1/3}}$.

Ασκηση 6. Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνεται με αέριο με ρυθμό $10\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{sec}$. Πόσο γρήγορα αυξάνεται η ακτίνα τού μπαλονιού όταν τό μήκος της είναι $30\,\mathrm{cm}$;
Υπόδειξη: Έχουμε ότι ο όγκος τήν χρονική στιγμή t δίδεται από $V(t) = \frac{4}{3}\pi R(t)^3$, όπου $R(t)$ είναι η ακτίνα τήν χρονική στιγμή t. Τα δεδομένα αντιστοιχούν στο ότι $V'(t) = 10$ γιά κάθε t. Παραγωγίζοντας έχουμε ότι η απάντηση είναι $\frac{1}{360\pi}$.

Ασκηση 7. Ένα σημείο κινείται στήν καμπύλη $3x^2 - y^2 = 12$ έτσι ώστε η y-συντεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό $6\,\mathrm{m/sec}$. Με ποιό ρυθμό αλλάζει η x-συντεταγμένη του όταν τό $x = 4\,\mathrm{m}$;
Υπόδειξη: Η τροχιά τής κίνησης είναι μια υπερβολή με δύο κλάδους: ο ένας αντιστοιχεί σε $x \geq 2$ και τέμνει τόν x-άξονα στο $x = 2$ και ο άλλος αντιστοιχεί σε $x \leq -2$ και τέμνει τόν x-άξονα στο $x = -2$. Όταν $x = 4$ είμαστε στον πρώτο κλάδο σε ένα από τα σημεία $(4, \pm 6)$. Η κίνηση είναι από κάτω πρός τα πάνω αφού η y-συντεταγμένη αυξάνει. Παραγωγίζοντας την σχέση $3x(t)^2 - y(t)^2 = 12$ ως προς τήν μεταβλητή t τού χρόνου έχουμε ότι $x'(t) = -3$ στο $(4, -6)$ και $x'(t) = 3$ στο $(4, 6)$.

Ασκηση 8. Ένα τρίγωνο εγγεγραμμένο σε ένα κύκλο έχει ως βάση του τήν οριζόντια διάμετρο τού κύκλου. Δείξτε ότι τό τρίγωνο έχει μέγιστο εμβαδόν όταν είναι ισοσκελές.
Υπόδειξη: Η κορυφή τού τριγώνου έχει συντεταγμένες (x, y) που ικανοποιούν την εξίσωση $x^2 + y^2 = R^2$, όπου R η ακτίνα τού κύκλου. Θεωρούμε τό y ως συνάρτηση τού x, δηλ. $y = y(x)$. Τό εμβαδόν τού τριγώνου δίδεται ως συνάρτηση τού x από τόν τύπο $E(x) = R\,y(x)$. Οπότε $E'(x) = 0$ αν $y'(x) = 0$. Παραγωγίζοντας τήν σχέση $x^2 + y(x)^2 = R^2$ έχουμε τότε (δηλ. όταν $y'(x) = 0$) ότι $x = 0$. Άρα η κορυφή τού τριγώνου ελαχίστου εμβαδού βρίσκεται στό σημείο $(0, R)$.

Πρόβλημα 1: Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και οτι $(f(x))^2 = x$ για κάθε $x > 0$. Δείξτε ότι είτε $f(x) = x$ για κάθε $x > 0$, είτε $f(x) = -x$ για κάθε $x > 0$.

Πρόβλημα 2: Μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται άνω φραγμένη (αντιστ. κάτω φραγμένη) άν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $f(x) \leq M$, για κάθε $x \in I$ (αντιστ. $f(x) \geq M$, για κάθε $x \in I$). Η f λέγεται φραγμένη άν είναι και άνω και κάτω φραγμένη.
α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ δέν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη.
β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x+1} \sin \frac{1}{x}$ είναι φραγμένη αλλά δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

Πρόβλημα 3: Έστω $b \neq 0$ και n φυσικός. Θεωρούμε τήν εξίσωση $x^n + b^n = (x + b)^n$. Δείξτε ότι
α) αν το n είναι άρτιος η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση.
β) αν το n είναι περιττός η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις.

Σημείωση: Τά προβλήματα 1, 2 και 3 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στίς ώρες γραφείου μου να τα δούμε.