

## ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 9

**Άσκηση 1.** Βρείτε τά παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2x - \pi}{\cos x}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x + 7\sqrt{x}}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$$

$$\theta) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$$

$$\iota) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$$

**Άσκηση 2.** Υπολογίστε τά παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int x\sqrt{2x^2 - 1} dx .$$

$$\beta) \int x(x^2 + 1)^{2/3} dx .$$

$$\gamma) \int x(x^2 + 8)^{100} dx .$$

$$\delta) \int \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx .$$

$$\epsilon) \int (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x} dx .$$

$$\sigma\tau) \int \cos^2 5x \sin 5x dx .$$

**Άσκηση 3.** Υπολογίστε τά παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_{1/2}^2 \sqrt{2x + 3} dx .$$

$$\beta) \int_{-\pi}^0 \frac{\sin x}{3 + \cos x} dx .$$

$$\gamma) \int_0^\pi e^{\cos x} \sin x dx .$$

$$\delta) \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx .$$

$$\epsilon) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \sin 2x dx .$$

**Άσκηση 4.** Υπολογίστε τά ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^{2\pi} \sin x dx.$$

β)  $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$ .

**Ασκηση 5.** α) Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από τήν παραβολή  $y = -3x^2 + 12$  και τόν  $x$ -άξονα.

β) Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από τήν παραβολή  $y = 2x^2 - 4$  και τόν  $x$ -άξονα.

γ) Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από τό γράφημα τής συνάρτησης  $y = |x| - 3$  και τόν  $x$ -άξονα.

**Ασκηση 6.** Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που βρίσκεται πάνω από το γράφημα τής συνάρτησης  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \cos^2 x$  και κάτω από την ευθεία  $y = 1$ .

**Ασκηση 7.** Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από το γράφημα τής συνάρτησης  $y = -x^2 - 2x$  και την ευθεία  $y = x$ .

**Ασκηση 8.** Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από τά γραφήματα τών συναρτήσεων  $y = 7 - 2x^2$  και  $y = x^2 + 4$ .

**Ασκηση 9.** Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από τά γραφήματα τών συναρτήσεων  $y = x^4 - 4x^2 + 4$  και  $y = x^2$ .

**Ασκηση 10.** Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από τά γραφήματα τών συναρτήσεων  $y = |x^2 - 4|$  και  $y = (x^2/2) + 4$ .

**Πρόβλημα 1.** Έστω  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μιά συνεχής συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(0, \infty)$ . Υποθέτουμε ότι  $f(0) = 0$  και ότι η παράγωγος συνάρτηση  $f'(x)$  είναι αύξουσα συνάρτηση στο  $(0, \infty)$ . Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση στο  $(0, \infty)$ .

**Πρόβλημα 2.** Ένας δρομέας διανύει μιά διαδρομή μήκους 10 χιλιομέτρων σε 30 λεπτά. Δείξτε ότι υπάρχει ένα τμήμα τής διαδρομής μήκους 5 χιλιομέτρων που ο δρομέας το διανύει σε ακριβώς 15 λεπτά.

**Πρόβλημα 3.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση με  $|f(x)| \leq (1 - x)^2$  για κάθε  $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ . Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ότι  $f'(1) = 0$ .

*Σημείωση:* Τά προβλήματα 1, 2 και 3 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στις ώρες γραφείου μου να τα δούμε.