

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 9 (με υποδείξεις)

Άσκηση 1. Βρείτε τὰ παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2x - \pi}{\cos x}$

Υπόδειξη: -2 .

β) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$

Υπόδειξη: $-\frac{1}{4}$.

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x + 7\sqrt{x}}$

Υπόδειξη: 0 .

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$

Υπόδειξη: 3 .

ε) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

Υπόδειξη: $+\infty$.

στ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$

Υπόδειξη: $-\frac{1}{2}$.

ζ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Υπόδειξη: 0 .

η) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$

Υπόδειξη: 0 .

θ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

Υπόδειξη: 1 .

ι) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$

Υπόδειξη: 0

Άσκηση 2. Υπολογίστε τὰ παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

α) $\int x\sqrt{2x^2 - 1} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{6}(2x^2 - 1)^{3/2} + c$.

β) $\int x(x^2 + 1)^{2/3} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{3}{10}(x^2 + 1)^{5/3} + c$.

γ) $\int x(x^2 + 8)^{100} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{202}(x^2 + 8)^{101} + c$.

δ) $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

Υπόδειξη: $4\sqrt{x^2 + 1} + c$.

ε) $\int (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{3}(x^2 + 2x)^{3/2} + c$.

στ) $\int \cos^2 5x \sin 5x dx$.

Υπόδειξη: $-\frac{1}{15} \cos^3(5x) + c$

Άσκηση 3. Υπολογίστε τὰ παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_{1/2}^2 \sqrt{2x + 3} dx$.

Υπόδειξη: $(7\sqrt{7} - 8)/3$.

β) $\int_{-\pi}^0 \frac{\sin x}{3 + \cos x} dx$.

Υπόδειξη: $-\ln 2$.

γ) $\int_0^\pi e^{\cos x} \sin x dx$.

Υπόδειξη: $e - e^{-1}$.

δ) $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$.

Υπόδειξη: $4/15$.

ε) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \sin 2x dx$.

Υπόδειξη: 0 .

Άσκηση 4. Υπολογίστε τά ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{2\pi} \sin x dx$.

Υπόδειξη: 0 .

β) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$.

Υπόδειξη: 4 .

Άσκηση 5. α) Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από τήν παραβολή $y = -3x^2 + 12$ και τόν x -άξονα.

Υπόδειξη: 32 .

β) Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από τήν παραβολή $y = 2x^2 - 4$ και τόν x -άξονα.

Υπόδειξη: $\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

γ) Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από τό γράφημα τής συνάρτησης $y = |x| - 3$ και τόν x -άξονα.

Υπόδειξη: 9 .

Άσκηση 6. Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που βρίσκεται πάνω από το γράφημα τής συνάρτησης $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos^2 x$ και κάτω από την ευθεία $y = 1$.

Υπόδειξη: $\frac{\pi}{2}$.

Άσκηση 7. Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από το γράφημα τής συνάρτησης $y = -x^2 - 2x$ και την ευθεία $y = x$.

Υπόδειξη: $9/2$.

Άσκηση 8. Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από τά γραφήματα τών συναρτήσεων $y = 7 - 2x^2$ και $y = x^2 + 4$.

Υπόδειξη: 4 .

Άσκηση 9. Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από τά γραφήματα τών συναρτήσεων $y = x^4 - 4x^2 + 4$ και $y = x^2$.

Υπόδειξη: 8 .

Άσκηση 10. Βρείτε τό εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από τά γραφήματα τών συναρτήσεων $y = |x^2 - 4|$ και $y = (x^2/2) + 4$.

Υπόδειξη: $128/3$.

Πρόβλημα 1. Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μιά συνεχής συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(0, \infty)$. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και ότι η παράγωγος συνάρτηση $f'(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση στο $(0, \infty)$. Δείξτε ότι η

συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση στο $(0, \infty)$.

Πρόβλημα 2. Ένας δρομέας διανύει μιά διαδρομή μήκους 10 χιλιομέτρων σε 30 λεπτά. Δείξτε ότι υπάρχει ένα τμήμα τής διαδρομής μήκους 5 χιλιομέτρων που ο δρομέας το διανύει σε ακριβώς 15 λεπτά.

Πρόβλημα 3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $|f(x)| \leq (1-x)^2$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ότι $f'(1) = 0$.

Σημείωση: Τά προβλήματα 1, 2 και 3 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στις ώρες γραφείου μου να τα δούμε.