ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΕΛΙΚΟΣ

4 Φεβρουαρίου 2004, Διδάσκων: Α. Κουβιδάκης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Εστω S η επιφάνεια που ορίζεται από την απεικόνιση $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u, v) = (u + v, u - v, uv)$ και έστω $P = (2, 0, 1)$ σημείο της S.

α) [**Μονάδες 10**] Βρείτε τις κύριες καμπυλότητες στο σημείο P.

β) [**Μονάδες 10**] Βρείτε τα κύρια διανύσματα στο T_PS (δηλ. στο επίπεδο των εφαπτόμενων διανυσμάτων της S στο σημείο P).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. [**Μονάδες 20**] Εστω $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με καμπυλότητα $\kappa_\alpha(s) \neq 0, \ \forall s \in \mathbb{R}$ και στρέψη $\tau_\alpha(s) = s^2 - 1$. Εστω $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε την επιφάνεια $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με διάνυσμα θέσης $\vec{X}\,(s, v) = \vec{\alpha}\,(s) + v\,\vec{b}_\alpha\,(s)$, όπου $\vec{\alpha}\,(s)$ είναι το διάνυσμα θέσης της καμπύλης α και $\vec{b}_\alpha\,(s)$ το δευτερεύον κάθετο διάνυσμα (δικάθετος) της α. Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας στα οποία η καμπυλότητα Gauss είναι μηδέν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Εστω $\vec{w}$ διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ με μήκος $||\ \vec{w}\ || = 1$. Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη του χώρου, παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου, με καμπυλότητα $\kappa_\alpha(s) > 0$ και στρέψη $\tau_\alpha(s) \neq 0, \ \forall s \in I$. Υποθέτουμε ότι το κύριο κάθετο διάνυσμα $\vec{\eta}_\alpha\,(s)$ της καμπύλης είναι κάθετο στο $\vec{w}$, $\forall s \in I$.

α) [**Μονάδες 15**] Δείξτε ότι το διάνυσμα ταχύτητας $\vec{t}_\alpha\,(s) = \alpha'(s)$ σχηματίζει σταθερή γωνία θ με το $\vec{w}$, $\forall s \in I$, όπως επίσης και το δευτερεύον κάθετο διάνυσμα (δικάθετος) $\vec{b}_\alpha\,(s)$ σχηματίζει σταθερή γωνία ϕ με το $\vec{w}$, $\forall s \in I$. (*Υπόδειξη:* Αρχίστε από αυτό που θέλετε να αποδείξετε, δηλ. εκφράστε αλγεβρικά τι σημαίνει το $\vec{t}_\alpha\,(s)$ να σχηματίζει σταθερή γωνία με το $\vec{w}$).

β) [**Μονάδες 15**] Δείξτε ότι $\tau_\alpha(s)/\kappa_\alpha(s) =$ σταθερό, $\forall s \in I$. (*Υπόδειξη:* Εκφράστε αλγεβρικά τι σημαίνει το $\vec{\eta}_\alpha\,(s)$ να είναι κάθετο στο $\vec{w}$, $\forall s \in I$).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Εστω S μια επιφάνεια και $a : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια επιφανειακή καμπύλη στην S, παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου, με καμπυλότητα $\kappa_\alpha(t) > 0, \ \forall t \in I$. Συμβολίζουμε με $\vec{N}\,(t)$ το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας στο σημείο $\alpha(t)$. Εστω $\vec{V}\,(t) = \vec{N}\,(t) \times \alpha'(t)$ και έστω $\lambda(t) = \vec{N}'\,(t) \cdot \alpha'(t)$ και $\mu(t) = \vec{N}'\,(t) \cdot \vec{V}\,(t)$. Δείξτε ότι:

α) [**Μονάδες 10**] Η α είναι ασυμπτωτική καμπύλη αν και μόνον αν $\lambda(t) = 0, \ \forall t \in I$.

β) [**Μονάδες 10**] Η α είναι κύρια καμπύλη αν και μόνον αν $\mu(t) = 0, \ \forall t \in I$.

γ) [**Μονάδες 10**] Η α είναι ταυτόχρονα κύρια και ασυμπτωτική καμπύλη αν και μόνον αν κείται σε ένα επίπεδο που είναι παντού εφαπτόμενο στην επιφάνεια S κατά μήκος της καμπύλης α. (*Υπόδειξη:* Αποδείξτε πρώτα ότι $\vec{N}'\,(t) = \lambda(t)\,\alpha'(t) + \mu(t)\,\vec{V}\,(t)$).

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ</u> Για την απάντηση κάποιου ερωτήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε προηγούμενο ερώτημα, έστω και αν δεν το έχετε αποδείξει.