ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΕΛΙΚΟΣ

Σεπτέμβριος 2004, Διδάσκων: Α. Κουβιδάκης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Εστω S η επιφάνεια που ορίζεται από την απεικόνιση $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u,v) = (u-v, uv, u+v)$ και έστω $P = (-1,2,3)$ σημείο της S.

α) [**Μονάδες 10**] Δείξτε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{w} = < -3, 0, 1 >$ είναι εφαπτόμενο στην S στο παραπάνω σημείο P και βρείτε την κάθετη καμπυλότητα $K_{P,S}(\overrightarrow{w})$.

β) [**Μονάδες 15**] Βρείτε τα κύρια διανύσματα στο $T_P S$ (δηλ. στο επίπεδο των εφαπτόμενων διανυσμάτων της S στο παραπάνω σημείο P).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. [**Μονάδες 25**] Εστω $\alpha : (-3,3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη, παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου, με καμπυλότητα $\kappa_\alpha(s) = s^2 + 5$ και στρέψη $\tau_\alpha(s) = s^2 - 4$. Εστω $D = (-3,3) \times (0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε την επιφάνεια $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{X}(s,v) = \overrightarrow{\alpha}(s) - v\alpha'(s)$. Περιγράψτε τα σημεία P της παραπάνω επιφάνειας στα οποία η μέση καμπυλότητα $H(P)$ είναι ίση με μηδέν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Εστω S μια επιφάνεια και $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια επιφανειακή καμπύλη, παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου, με καμπυλότητα $\kappa_\alpha(t) > 0$ και στρέψη $\tau_\alpha(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

α) [**Μονάδες 10**] Δείξτε ότι αν η α είναι ασυμπτωτική καμπύλη τότε το δευτερεύον κάθετο διάνυσμα (δικάθετος) $\overrightarrow{b}_\alpha(t)$ της καμπύλης είναι κάθετο στην επιφάνεια S στο σημείο $\alpha(t)$, $\forall t \in I$.

β) [**Μονάδες 15**] Δείξτε ότι ισχύει και το αντίστροφο του ερωτήματος α). Δηλαδή, αν για την καμπύλη α το δευτερεύον κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{b}_\alpha(t)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S στο σημείο $\alpha(t)$, $\forall t \in I$, τότε η α είναι ασυμπτωτική καμπύλη της επιφάνειας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Εστω $\overrightarrow{w}$ διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ με μήκος $\| \overrightarrow{w} \| = 1$. Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη του χώρου, παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου, με καμπυλότητα $\kappa_\alpha(s) > 0$ και στρέψη $\tau_\alpha(s) \neq 0$, $\forall s \in I$. Υποθέτουμε ότι το δευτερεύον κάθετο διάνυσμα (δικάθετος) $\overrightarrow{b}_\alpha(s)$ σχηματίζει σταθερή γωνία ϕ με το $\overrightarrow{w}$, $\forall s \in I$.

α) [**Μονάδες 10**] Δείξτε ότι το διάνυσμα ταχύτητας $\overrightarrow{t}_\alpha(s) = \alpha'(s)$ σχηματίζει σταθερή γωνία θ με το $\overrightarrow{w}$, $\forall s \in I$.

β) [**Μονάδες 15**] Δείξτε ότι $\tau_\alpha(s)/\kappa_\alpha(s) =$ σταθερό, $\forall s \in I$.