ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΠΡΟΟΔΟΣ
7 Δεκεμβρίου 2003,   Διδάσκων: Α. Κουβιδάκης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Εστω $\overrightarrow{w}$ ένα διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}^3$ με μήκος 1, δηλ. $|| \overrightarrow{w} || = 1$. Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη του χώρου παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου, με $\kappa_\alpha(s) > 0, \forall s \in I$, και με την ιδιότητα ότι το διάνυσμα ταχύτητας $\overrightarrow{t_\alpha}(s) = \alpha'(s)$ σχηματίζει σταθερή γωνία θ με το $\overrightarrow{w}$, γιά κάθε $s \in I$.
α) [Μονάδες 15] Αποδείξτε ότι το κύριο κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{\eta_\alpha}(s)$ της καμπύλης α είναι κάθετο πρός το διάνυσμα $\overrightarrow{w}$, για κάθε $s \in I$.
β) [Μονάδες 15] Δείξτε ότι αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, δηλ. το $\overrightarrow{t_\alpha}(s)$ είναι κάθετο πρός το διάνυσμα $\overrightarrow{w}$, για κάθε $s \in I$, τότε η καμπύλη είναι επίπεδη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Εστω $\alpha : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη του χώρου παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\kappa_\alpha(s) > 0,\ \tau_\alpha(s) > 0,\ \forall s$. Εστω ότι το δευτερεύον κάθετο διάνυσμα (δικάθετος) $\overrightarrow{b_\alpha}(s)$ της α έχει συντεταγμένες $\overrightarrow{b_\alpha}(s) = < y_1(s),\ y_2(s),\ y_3(s) >$. Ορίζουμε την καμπύλη $\beta : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ από τον τύπο

$$\beta(s) = (\int_0^s y_1(t)dt,\ \int_0^s y_2(t)dt,\ \int_0^s y_3(t)dt)\,.$$

Δείξτε ότι
α) [Μονάδες 5] Η καμπύλη β είναι παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου.
β) [Μονάδες 10] $\kappa_\beta(s) = \tau_\alpha(s),\ \forall s \in (-1,1)$.
γ) [Μονάδες 20] $\tau_\beta(s) = \kappa_\alpha(s),\ \forall s \in (-1,1)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Εστω $\alpha : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\kappa_\alpha(s) \neq 0,\ \tau_\alpha(s) \neq 0,\ \forall s \in (-1,1)$. Εστω $D = (-1,1) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε την επιφάνεια $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{X}(s,v) = \overrightarrow{\alpha}(s) + v\, \overrightarrow{\eta}_\alpha(s)$, όπου $\overrightarrow{\alpha}(s)$ είναι το διάνυσμα θέσης της καμπύλης α και $\overrightarrow{\eta}_\alpha(s)$ το κύριο κάθετο διάνυσμα της α.
α) [Μονάδες 10] Δείξτε ότι η παραπάνω επιφάνεια είναι κανονική.
β) [Μονάδες 10] Βρείτε την πρώτη θεμελιώδη μορφή της επιφάνειας στο $(0,0) \in D$, δηλ. βρείτε την $\mathbf{I}_{(0,0)}(s', v')$.
γ) [Μονάδες 15] Εστω $\beta : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η επιφανειακή καμπύλη που ορίζεται από το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{\beta}(s) = \overrightarrow{\alpha}(s) + s\, \overrightarrow{\eta}_\alpha(s)$. Εστω $P = \alpha(0) = \beta(0)$. Βρείτε την γωνία τομής των επιφανειακών καμπυλών α και β στο σημείο P.