ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Ασκηση 1. Εστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα και $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Θωρούμε την καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (t, f(t))$. Αν $a, b \in I$ με $a < b$, δείξτε ότι

$$L_b^a(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt\ .$$

Ασκηση 2. Δείξτε ότι το μήκος της παραβολής $x^2 = 2py$, $p > 0$, από το σημείο $(0,0)$ έως το σημείο $(a, \frac{a^2}{2p})$, $a > 0$, ισούται με

$$\frac{1}{2p}[a\sqrt{a^2+p^2} \ + \ p^2 \log\frac{a + \sqrt{a^2+p^2}}{p}\ ]\ .$$

Ασκηση 3. Θωρούμε την καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα $|\gamma'(t)| = 1$, για κάθε $t \in I$. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\gamma''(t)$ και $\gamma'(t)$ είναι κάθετα, για κάθε $t \in I$.

Ασκηση 4. Εστω $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια (κανονική) καμπύλη. Δείξτε ότι
(α) Η γ έχει σταθερή ταχύτητα αν και μόνον αν το διάνυσμα της επιτάχυνσης γ'' είναι κάθετο στην καμπύλη γ σε κάθε σημείο, δηλ. το $\gamma''(t)$ είναι κάθετο στο $\gamma'(t)$, για κάθε $t \in I$.
(β) Η γ είναι αναπαραμέτριση ευθείας αν και μόνον αν το το διάνυσμα της επιτάχυνσης γ'' είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη γ σε κάθε σημείο, δηλ. το $\gamma''(t)$ είναι παράλληλο με το $\gamma'(t)$, για κάθε $t \in I$.

Ασκηση 5. Παραμετρίστε ως προς μήκος τόξου την καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (3\cos e^t, 3\sin e^t)$.

Ασκηση 6. Παραμετρίστε ως προς μήκος τόξου την καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a, b > 0$.

Ασκηση 7. Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ επίπεδη καμπύλη και $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ στέρεα κίνηση με

$$\Phi(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

όπου $A\,A^t = I$. Δείξτε ότι αν $\mathrm{detA} = 1$, τότε $k_\alpha = k_{\Phi\circ\alpha}$. Αν $\mathrm{detA} = -1$, τότε $k_\alpha = -k_{\Phi\circ\alpha}$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

***Ασκηση* 1.** Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\alpha(s) = (x_1(s), x_2(s))$. Εστω $\phi(s)$ η γωνιακή συνάρτηση και $\overrightarrow{\eta}(s) = < -\sin\phi(s),\ \cos\phi(s) >$ το κάθετο διάνυσμα στο σημείο $\alpha(s)$. Υποθέτουμε ότι $\kappa_\alpha(s) \neq 0,\ \forall s$. Ορίζουμε την καμπύλη $\beta(s) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\beta(s) = (x_1(s) - \frac{1}{\kappa_\alpha(s)} \sin\phi(s),\ x_2(s) + \frac{1}{\kappa_\alpha(s)} \cos\phi(s)).$$

Δείξτε ότι:
α) $\beta'(s) \neq \overrightarrow{0}, \forall s \Longleftrightarrow \kappa'_\alpha(s) \neq 0, \forall s$.
β) Αν $\beta'(s) \neq \overrightarrow{0}$ τότε δείξτε ότι η εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης β στο σημείο $\beta(s)$ περιέχει το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{\eta}(s)$ της καμπύλης α στο σημείο $\alpha(s)$.

***Ασκηση* 2.** Δείξτε ότι η καμπύλη $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\alpha(t) = (4/5\cos t,\ 1 - \sin t,\ -3/5\cos t)$ είναι κύκλος και βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

***Ασκηση* 3.** Να υπολογισθεί το πλαίσιο Frenet της καμπύλης $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\alpha(t) = (\frac{(1+t)^{3/2}}{3},\ \frac{(1-t)^{3/2}}{3},\ \frac{t}{\sqrt{2}})$ και να βρεθούν η καμπυλότητα και η στρέψη.

***Ασκηση* 4.** Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με καμπυλότητα $\kappa_\alpha(s) > 0, \forall s$. Αν $\overrightarrow{v}(s) = \tau_\alpha(s)\overrightarrow{t}(s) + \kappa_\alpha(s)\overrightarrow{b}(s)$, τότε δείξτε ότι

$$\alpha'' = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{t},\quad \overrightarrow{\eta}' = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\eta},\quad \overrightarrow{b}' = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{b}.$$

***Ασκηση* 5.** Προσπαθήστε να βρείτε μια καμπύλη $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου, με καμπυλότητα $\kappa_\alpha(s) = s$.

***Ασκηση* 6.** Βρείτε την καμπυλότητα και την στρέψη για τις παρακάτω καμπύλες του χώρου:
α) $\alpha(t) = (a(t - \sin t),\ a(1 - \cos t),\ bt)$.
β) $\alpha(t) = (a(3t - t^2),\ 3at^2, a(3t + t^3))$.

***Ασκηση* 7.** Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η καμπύλη με $\alpha(t) = (a\sin^2 t,\ a\sin t\cos t,\ a\cos t)$. Δείξτε ότι το ίχνος της α βρίσκεται σε σφαίρα ακτίνας a και βρείτε την καμπυλότητα και την στρέψη της.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #3

Ασκηση 1. Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\kappa_\alpha > 0$, $\tau_\alpha \neq 0$.
α) Αν το ίχνος της α βρίσκεται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R και κέντρου $c = (c_1, c_2, c_3)$ τότε δείξτε ότι

$$\vec{\alpha}(s) - \vec{c} = -\rho\, \vec{\eta}(s) - \rho'\sigma\, \vec{b}(s),$$

όπου $\rho = \frac{1}{\kappa_\alpha(s)}$ και $\sigma = \frac{1}{\tau_\alpha(s)}$. Συμπεράνατε ότι $R^2 = \rho^2 + (\rho'\sigma)^2$.
β) Αντιστροφα, αν $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2 =$ σταθερά, έστω R^2, και $\rho' \neq 0$, δείξτε ότι το ίχνος της α βρίσκεται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R.

Ασκηση 2. Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη του χώρου. Τότε ορίζουμε το μοναδιαίο εφαπτόμενο $\vec{t}$, το κύριο κάθετο $\vec{\eta}$ και το δευτερεύον κάθετο διάνυσμα $\vec{b}$ στο σημείο $\alpha(s)$ ως ακολούθως. Παίρνουμε μια θετική αναπαραμέτριση $\beta = \alpha \circ h$ της α ως προς μήκος τόξου και ορίζουμε $\vec{t}(t) = \vec{t_\beta}(s)$, $\vec{\eta}(t) = \vec{\eta_\beta}(s)$ και $\vec{b}(t) = \vec{b_\beta}(s)$, όπου $t = h(s)$.
α) Εκφράστε τα $\vec{t}\,'(t)$, $\vec{\eta}\,'(t)$, $\vec{b}\,'(t)$ σε σχέση με τα $\vec{t}(t)$, $\vec{\eta}(t)$, $\vec{b}(t)$, δηλ. βρείτε τους τύπους του Frenet για την καμπύλη α. (Σημείωση: οι τύποι του Frenet που έχουμε αποδείξει είναι για καμπύλες παραμετρισμένες ως προς μήκος τόξου).
β) Δείξτε ότι $\vec{t} = \frac{\alpha'}{||\alpha'||}$, $\vec{\eta} = \vec{b} \times \vec{t}$, $\vec{b} = \alpha' \times \alpha''/||\alpha' \times \alpha''||$.

Ασκηση 3. Δείξτε ότι η καμπυλότητα κ_α μιας καμπύλης α του χώρου ικανοποιεί την σχέση, όπου $v = ||\alpha'||$.

$$\kappa_\alpha^2 v^4 = ||\alpha''||^2 - (v')^2$$

Ασκηση 4. Αν όλες οι εφαπτόμενες μιας καμπύλης του χώρου περνάνε από ένα σταθερό σημείο, δείξτε ότι η καμπύλη είναι μια ευθεία.

Ασκηση 5. Αν όλες οι κύριες κάθετοι μιας καμπύλης του χώρου περνάνε από ένα σταθερό σημείο, δείξτε ότι η καμπύλη είναι κύκλος.

Ασκηση 6. Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η καμπύλη του χώρου με

$$\alpha(t) = \left(\frac{t}{2\sqrt{2}} + 3\sin\frac{t}{2\sqrt{2}},\ 2\cos\frac{t}{2\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{8}}t - \sin\frac{t}{2\sqrt{2}}\right).$$

Δείξτε ότι η α είναι μια έλικα δηλ. μια μετατόπιση (κάτω από ισομετρία) καμπύλης β με $\beta(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, όπου $a > 0, b \neq 0$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4

Ασκηση 1. Εστω $f : (1,2) \longrightarrow R$ συνάρτηση με $z = f(x)$. Περιστρέφουμε το γράφημα της f, το οποίο βρίσκεται στο zx-επίπεδο, γύρω από τον z-άξονα. Περιγράψετε την παραγόμενη επιφάνεια εκ περιστροφής με παραμετρικό τρόπο και δείξτε ότι είναι κανονική επιφάνεια. Οταν $z = x^2$ βρείτε το εμβαδόν της 'ζώνης' μεταξύ των επιπέδων $z = f(x_1)$και $z = f(x_2)$, όπου $1 < x_1 < x_2 < 2$.

Ασκηση 2. Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη του χώρου, παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με καμπυλότητα που ικανοποιεί $|\kappa_\alpha| < M$, για κάποιον θετικό M. Εστω R αριθμός με $0 < R < 1/M$. Ορίζουμε τον R-σωλήνα γύρω από την καμπύλη α, ως την επιφάνεια $\Phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που δίδεται σε παραμετρική μορφή από το διάνυσμα θέσης $\vec{X}\,(u,v) = \vec{\alpha}\,(u) + R(\vec{n}\,(u)\cos v + \vec{b}\,(u)\sin v)$, όπου $\vec{n}\,(u)$ και $\vec{b}\,(u)$ το κύριο και το δευτερεύον κάθετο διάνυσμα της α. Ποιά η γεωμετρική ερμηνεία αυτής της επιφάνειας; Δείξτε ότι η επιφάνεια είναι κανονική. Αποδείξτε ότι αν η καμπύλη α έχει μήκος L τότε η παραπάνω επιφάνεια έχει εμβαδόν $2\pi RL$.

Ασκηση 3. Εστω $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > 0\}$ και $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε την επιφάνεια $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u,v) = (u,\ v,\ uf(\frac{v}{u}))$. Δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας σε κάθε σημείο της διέρχεται από το $(0,0,0)$.

Ασκηση 4. Εστω $D = \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Θεωρούμε την επιφάνεια $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ \ln\cos v + u)$. Εστω $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ και $\alpha_{a_i} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow D$ οι καμπύλες με τύπο $\alpha_{a_i}(t) = (a_i, t)$. Για κάθε $b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ορίζουμε την καμπύλη $\beta_b : \mathbb{R} \longrightarrow D$ με $\beta_b(t) = (t, b)$. Δείξτε ότι οι καμπύλες $\Phi \circ \alpha_{a_1}$ και $\Phi \circ \alpha_{a_1}$ αποκόπτουν σε κάθε καμπύλη $\Phi \circ \beta_b$, $b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ένα κομμάτι σταθερού πάντα μήκους, δηλ. ανεξάρτητο της επιλογής του b.

Ασκηση 5. Εστω $\alpha : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\kappa_\alpha(t) \neq 0$, $\forall t \in (a,b)$. Εστω $D = (a,b) \times (\mathbb{R} - \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε την επιφάνεια $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με διάνυσμα θέσης $\vec{Q}\,(u,v) = \vec{\alpha}\,(u) + v\alpha'(u)$. Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία αυτής της επιφάνειας. Δείξτε ότι η Φ είναι κανονική επιφάνεια και βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο της.

Ασκηση 6. Ο κύκλος στο xz-επίπεδο του χώρου, με κέντρο το σημείο $(2,0,0)$ και ακτίνα 1 περιγράφεται από την $\alpha(u) = (2 + \cos u, \sin u)$. Οταν περιστρέψουμε τον παραπάνω κύκλο γύρω από τον z-άξονα παράγουμε μια επιφάνεια (έναν τόρο) που δίδεται σε παραμετρική μορφή από $\Phi(u,v) = ((2+\cos u)\cos v,\ (2+\cos u)\sin v,\ \sin u)$. Βρείτε την γεωμετρική ερμηνεία των γωνιών u, v. Δείξτε ότι η παραπάνω είναι κανονική επιφάνεια και βρείτε το εμβαδόν της.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #5

Ασκηση 1. Εστω O η αρχή των αξόνων και P σημείο του χώρου. Εστω $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$ διανύσματα του χώρου γραμμικώς ανεξάρτητα. Τότε για το επίπεδο που δίδεται από διάνυσμα θέσης $\vec{X}\ (u,v) = \vec{OP} + u\ \vec{w_1} + v\ \vec{w_2}$ βρείτε την πρώτη και την δεύτερη θεμελιώδη μορφή σε κάθε σημείο του.

Ασκηση 2. Θεωρούμε τον κύλινδρο $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)$, όπου $R > 0$.
α) Βρείτε την πρώτη και την δεύτερη θεμελιώδη μορφή σε κάθε σημείο του.
β) Οταν τμήσουμε τον κύλινδρο με ένα επίπεδο που περναέι από το σημείο $P = (0, R, 0)$, σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με το xy-επίπεδο και περιέχει το διάνυσμα $< 1, 0, 0 >$, παίρνουμε μια έλλειψη. Βρείτε την καμπυλότητά της έλλειψης στο σημείο P.

Ασκηση 3. Εστω S το γράφημα της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 - y^2$. Υπολογίστε την καμπυλότητα των κάθετων τομών.

Ασκηση 4. Εστω S το γράφημα της συνάρτησης $z = f(x,y)$. Βρείτε την 2η θεμελιώδη μορφή.

Ασκηση 5. Θεωρούμε μια καμπύλη α στο x,z-επίπεδο παραμετρησμένη ως προς μήκος τόξου. Εστω $\alpha(s) = (x(s), z(s))$. Υποθέτουμε ότι $x(s) > 0, \forall s$. Οταν περιστρέψουνε την α γύρω από τον z-άξονα παίρνουμε μια επιφάνεια S εκ περιστροφής.
α) Δείξτε ότι η S περιγράφεται σε παραμετρική μορφή από την $\Phi(s,\phi) = (x(s)\cos\phi,\ x(s)\sin\phi,\ z(s))$.
β) Δείξτε ότι η S είναι κανονική επιφάνεια και βρείτε το κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο της.
γ) Βρείτε την 1η και 2η θεμελιώδη μορφή και την κάθετη καμπυλότητα σε κάθε σημείο της.

Ασκηση 6. Εστω $a, b, c > 0$. Θεωρούμε την επιφάνεια S που ορίζεται από την

$$\Phi(u,v) = (a\cos u\cos v, b\cos u\sin v, c\sin u)$$

α) Βρείτε την 1η και 2η θεμελιώδη μορφή και την κάθετη καμπυλότητα σε κάθε σημείο της.
β) Βρείτε την καμπυλότητα των οριζόντιων τομών, δηλ. των καμπυλών που παίρνουμε αμα τμήσουμε την S με τα επίπεδα $z = d$, όπου d μια σταθερά με $d < |c|$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6

Ασκηση 1. Εστω S το γράφημα συνάρτησης $z = f(x, y)$, δηλ. $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Εστω $P = \Phi(a, b)$.
α) Δείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss στο P είναι μηδέν εάν και μονον εάν

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a,b)\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a,b)^2.$$

β) Δείξτε ότι η μέση καμπυλότητα στο P είναι μηδέν εάν και μόνον εάν

$$(1+\frac{\partial f}{\partial u}(a,b)^2)\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a,b)-2\frac{\partial f}{\partial u}(a,b)\,\frac{\partial f}{\partial v}(a,b)\,\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a,b)+(1+\frac{\partial f}{\partial v}(a,b)^2)\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a,b) = 0.$$

Ασκηση 2. Εστω S η επιφάνεια που δίδεται από την $\Phi(u, v) = (u, v, \log\cos v - \log\cos u)$.
α) Βρείτε την καμπυλότητα Gauss στο σημείο της $P = \Phi(0, 0)$.
β) Δείξτε ότι η μέση καμπυλότητα είναι μηδέν σε κάθε σημείο της S.

Ασκηση 3. Βρείτε τις κύριες καμπυλότητες και τα κύρια διανύσματα σε κάθε σημείο του γραφήματος της συνάρτησης $z = xy$.

Ασκηση 4. Εστω S ο τόρος της άσκησης 6, φυλλάδιο 4.
α) Δείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss στο σημείο $P = \Phi(u, v)$ είναι ίση με $K = \frac{\cos u}{2+\cos u}$.
β) Δείξτε ότι η S έχει σημεία που είναι ελλειπτικά, σαγματικά και παραβολικά.
γ) Σε κάθε ένα από τα σημεία του ερωτήματος β), βρείτε τις κύριες καμπυλότητες και τα κύρια διανύσματα.

Ασκηση 5. Δείξτε ότι η επιφάνεια της άσκησης 5, φυλλάδιο 4, έχει σε κάθε σημείο της καμπυλότητα Gauss ίση με το μηδέν.

Ασκηση 6. Δείξτε ότι η επιφάνεια της άσκησης 2, φυλλάδιο 4, έχει σε κάθε σημείο της καμπυλότητα Gauss ίση με

$$K = \frac{-\kappa_\alpha(u)\cos v}{R(1 - \kappa_\alpha(u) R \cos v)}.$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #7

Ασκηση 1. Εστω P σαγματικό (υπερβολικό) σημείο μιας επιφάνειας με μέση καμπυλότητα $H(P) = 0$. Δείξτε ότι οι ασυμπτωτικές διευθύνσεις στο P είναι κάθετες μεταξύ τους.

Ασκηση 2. Εστω S η επιφάνεια που ορίζεται από την $\Phi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$. Να δειχθεί ότι σε κάθε σημείο P της S έχουμε $H(P) = 0$. Να βρεθουν οι κύριες και οι ασυμπτωτικές καμπύλες S.

Ασκηση 3. Να βρεθουν οι οι ασυμπτωτικές καμπύλες της επιφάνειας S που είναι το γράφημα της συνάρτησης $f(x, y) = xy$.

Ασκηση 4. Εστω $\alpha(s) = (e^{-s^2/2}, s)$, $s > 0$ επίπεδη καμπύλη στο xz-επίπεδο και έστω S η επιφάνεια εκ περιστροφής που παίρνουμε όταν περιστρέψουμε την καμπύλη α γύρω από τον z-άξονα, όπως στην άσκηση 5, φυλλάδιο 5. Βρείτε τις κύριες καμπύλες της παραπάνω επιφάνειας.

Ασκηση 5. Εστω α επιφανειακή καμπύλη σε επιφάνεια S και έστω $\overrightarrow{\mathbf{N}}(t)$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσματικό πεδίο κατά μήκος της α. Δείξτε ότι η α είναι κύρια καμπύλη της S αν και μόνον αν η επιφάνεια που ορίζεται από το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{X}(t, v) = \overrightarrow{\alpha}(t) + v\,\overrightarrow{N}(t)$ έχει σε κάθε σημείο της καμπυλότητα Gauss ίση με μηδέν.

Ασκηση 6. Εστω S_1, S_2 επιφάνειες και έστω α καμπύλη που ορίζεται ως η τομή των επιφανειών S_1, S_2. Υποθέτουμε ότι τα κάθετα διανύσματα των S_1, S_2 σχηματίζουν σταθερή γωνία κατά μήκος των σημείων της α. Δείξτε ότι η α είναι κύρια καμπύλη της επιφάνειας S_1 αν και μόνον αν είναι κύρια καμπύλη της επιφάνειας S_2.