1 Καμπύλες (συνοπτικά)

1.1 Καμπύλες-Γενικά

Ορισμός 1.1 *Μια (παραμετρισμένη) καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$ είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, με $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, όπου I είναι ένα ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$. Το σύνολο $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται ίχνος της καμπύλης. Σημειώνουμε ότι όταν μιλάμε για διαφορίσιμη απεικόνιση σε αυτό το μάθημα θα εννοούμε ότι έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης.*

Σημείωση 1.1 Με $\vec{x}\ (t)$ θα συμβολίζουμε το διάνυσμα θέσης που αντιστοιχεί στο σημείο $\alpha(t)$ του $\mathbb{R}^n$. Μια καμπύλη μπορεί προφανώς να καθοριστεί απο το διάνυσμα θέσης της.

Παράδειγμα 1.1 $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η καμπύλη με διάνυσμα θέσης $\vec{x}\ (t) = \vec{p} + t\ \vec{q}$, είναι η ευθεία που περνάει από το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα θέσης $\vec{p}$ και έχει κλίση που καθορίζεται από το διάνυσμα $\vec{q}$.

Παράδειγμα 1.2 $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a, b > 0$, είναι μια έλικα.

Παράδειγμα 1.3 $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\alpha(t) = (t^2, t^3)$, $a, b > 0$, είναι μια καμπύλη που κάνει μια 'γωνία' στο σημείο $(0, 0)$.

Παράδειγμα 1.4 $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, είναι μια καμπύλη που κάνει έναν 'κόμπο' στο σημείο $(0, 0)$. (Σημείωση: $\alpha(2) = \alpha(-2)$).

Παράδειγμα 1.5 $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $\alpha(t) = (t, |t|)$, δεν είναι καμπύλη διότι η απεικόνιση δεν είναι διαφορίσιμη.

Ορισμός 1.2 *Αν $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ μια καμπύλη με $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, τότε ορίζουμε ως διάνυσμα ταχύτητας της α στο σημείο $\alpha(t)$ το εφαπτόμενο διάνυσμα $\alpha'(t) = < x_1(t)', \ldots, x_n(t)' >$. Ως ταχύτητα της α στο σημείο $\alpha(t)$ ορίζουμε το μέτρο $||\alpha'(t)||$ του διανύσματος ταχύτητας.*

Για να είναι η καμπύλη 'καλή' θα θέλουμε σε κάθε σημείο της το διάνυσμα ταχύτητας να μην είναι μηδέν. Καμπύλες που δεν ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα είναι ουσιαστικά καμπύλες με 'γωνίες' όπως η καμπύλη του παραδείγματος 1.3, είτε καμπύλες που η παραμέτρησή τους δεν είναι φυσιολογική όπως π.χ. η διαγώνιος ευθεία με την μη φυσιολογική παραμέτρηση $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $\alpha(t) = (t^2, t^2)$, είτε καμπύλες που δεν είναι καμπύλες (!!) όπως π.χ. η απεικόνιση $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\alpha(t) = (0, 0, 0)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, δηλ. η σταθερή απεικόνιση.

Ορισμός 1.3 *Μια καμπύλη $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται κανονική αν $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$. Από εδώ και πέρα όταν αναφερόμαστε σε καμπύλες θα ενοούμε κανονικές καμπύλες (πολλές φορές θα αναφέρουμε μια καμπύλη ως 'κανονική καμπύλη' για έμφαση).*

Ορισμός 1.4 *Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ μια καμπύλη και $h : J \longrightarrow I$ μια 1-1,επί, διαφορίσιμη συνάρτηση από ένα ανοικτό J του $\mathbb{R}$ στο I, με διαφορίσιμη αντίστροφη συνάρτηση. Τότε η καμπύλη $\beta = \alpha \circ h : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται αναπαραμέτρηση της α ως προς την h.*

Σημείωση 1.2 Συμβολίζουμε με t την μεταβλητή του I και με s την μεταβλητή του J. Τότε έχουμε ότι $h'(s) \neq 0,\ \forall s \in J$ και ${h^{-1}}'(t) = \frac{1}{h'(h^{-1}(t))}$. Συνηθίζουμε, επίσης, να συμβολίζουμε το $h(s)$ με $t = t(s)$ και το $h^{-1}(t)$ με $s = s(t)$. Με αυτόν τον συμβολισμό ο παραπάνω τύπος γράφεται ως $s'(t) = \frac{1}{t'(s)}$ και άρα $t'(s) = \frac{1}{s'(t)}$.

Σημείωση 1.3 Από την παραπάνω σημείωση έχουμε ότι $h'(s) \neq 0,\ \forall s \in J$ και επομένως, αφού η h είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι ή $h'(s) > 0,\ \forall s \in J$ ή $h'(s) < 0,\ \forall s \in J$. Στην πρώτη περίπτωση θα ονομάζουμε την αντίστοιχη αναπαραμέτρηση θετική, στην δεύτερη περίπτωση αρνητική.

Πρόταση 1.1 *Αν β είναι η αναπαραμέτρηση μιας καμπύλης α ως προς την συνάρτηση h, τότε $\beta'(s) = h'(s)\,\gamma'(h(s))$. Ακολουθώντας τον συμβολισμό της σημείωσης 1.2 ο παραπάνω τύπος γράφεται ως $\beta'(s) = t'(s)\alpha(t(s))$.*

Απόδειξη: Είναι $\beta(s) = \alpha(h(s))$ και από τον κανόνα της παραγώγισης σύνθεσης απεικόνισεων έχουμε το παραπάνω αποτέλεσμα. $\diamondsuit$

Σημείωση 1.4 Από τα παραπάνω εύκολα βλέπουμε ότι:
1. Αν η α είναι κανονική τότε και κάθε αναπαραμέτρησή της β είναι κανονική.
2. Η σχέση 'αναπαραμέτρηση' στο σύνολο των καμπύλων είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση 1.2 *Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ μια καμπύλη και $a, b \in I$ με $a < b$. Τότε το μήκος της καμπύλης από το σημείο $\alpha(a)$ στο σημείο $\alpha(b)$ δίδεται από*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||\, dt\ .$$

Πρόταση 1.3 *Εστω α μια κανονική καμπύλη. Τότε υπάρχει μια αναπαραμέτρηση $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ της α με την ιδιότητα $||\beta'(s)|| = 1$, για κάθε $s \in J$.*

Απόδειξη: Πάρε $L(t) := \int_a^t ||\alpha'(u)||du$, όπου $a \in I$. Είναι $L'(t) = ||\alpha'(t)|| > 0$ συνεπώς η συνάρτηση $L = L(t) : I \longrightarrow J$, που στέλνει το t στο $s = s(t)$ είναι γνησίως αύξουσα και άρα έχει αντίστροφο συνάρτηση $L^{-1} : J \longrightarrow I$, που στέλει το s στο $t = t(s)$. Εστω $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ η σύνθεση $\beta = \alpha \circ L^{-1}$, δηλ. $\beta(s) = \alpha(t(s))$. Με αυτόν τον συμβολισμό, έχουμε ότι $L'(t) := s'(t) = ||\alpha'(t)|| > 0$. Από την Πρόταση 1.1 και την Σημείωση 1.2 έχουμε ότι $\beta'(s) = t'(s)\ \alpha'(t(s))$. Αρα, $||\beta'(s)|| = |t'(s)| \cdot ||\alpha'(t(s))|| = \frac{1}{s'(t)} \cdot s'(t) = 1$. $\diamondsuit$

Σημείωση 1.5 Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω είναι η ακόλουθη: αν σκεφτούμε ότι το ίχνος της καμπύλης είναι από νήμα, τότε τεντώνοντας το νήμα φτιάχνουμε ένα διάστημα J μήκους όσο και το μήκος της καμπύλης. Υπάρχει, επίσης, μια ταυτολογική απεικόνιση από το τεντωμένο νήμα, δηλ. το J, στην καμπύλη που στέλνει κάθε σημείο του J στο αντίστοιχο σημείο της καμπύλης. Αυτή είναι η απεικόνιση β που κατασκευάσαμε στην απόδειξη της πρότασης και αντιστοιχεί στην παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου.

Παράδειγμα 1.6 Η καμπύλη με διάνυσμα θέσης $\vec{x}\ (t) = \vec{p}\ + t\ \vec{q}$ έχει αναπαραμέτρηση ως προς μήκος τόξου την $\beta(s) = \vec{p}\ + s\frac{\vec{q}}{||\vec{p}||}$.

Παράδειγμα 1.7 Ο κύκλος ακτίνας R με παραμέτρηση $\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t)$ έχει αναπαραμέτρηση ως προς μήκος τόξου την $\beta(s) = (R\cos(s/R), r\sin(s/R))$.

Ορισμός 1.5 *Μια καμπύλη $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται ότι είναι παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου, αν $||\alpha'(s)|| = 1$, για κάθε $s \in I$.*

Σημείωση 1.6 Στην πράξη η παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου είναι δύσκολο να υπολογιστεί διότι ο υπολογισμός εμπεριέχει την εύρεση της αντιστρόφου μιας δοσμένης συνάρτησης, βλ. απόδειξη της Πρότασης 1.3. Παρ' όλα αυτά και μόνον η ύπαρξη μιας τέτοιας αναπαραμέτρησης, έστω και να δεν μπορούμε να την κατασκευάσουμε, αποδεικνύεται ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στην μελέτη των καμπυλών.

1.2 Επίπεδες καμπύλες

1.2.1 Καμπυλότητα επίπεδων καμπυλών

Θα ορίσουμε πρώτα την καμπυλότητα για επίπεδες καμπύλες παραμετρισμένες ως προς μήκος τόξου. Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ επίπεδη καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου. Παίρνουμε τα διανύσματα $e_1 =< 1, 0 >$, $e_2 =< 0, 1 >$. Εστω $\phi(s)$ η γωνία που σχηματίζει το e_1 με το διάνυσμα ταχύτητας $\alpha'(s)$. Η φορά διαγραφής της γωνίας είναι η αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού.

Ορισμός 1.6 *Ορίζουμε ως καμπυλότητα της καμπύλης α, παραμετρισμένης ως προς μήκος τόξου, την $\kappa_\alpha(s) = \frac{d\phi(s)}{ds}$.*

Πρόταση 1.4 *Εστω $\beta = \alpha \circ h$ μια θετική αναπαραμέτρηση της α που είναι και αυτή παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου. Τότε $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(h(s))$.*

Ορισμός 1.7 *Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ επίπεδη καμπύλη. Τότε οριζουμε την καμπύλότητα της α ως εξής. Παίρνουμε μια θετική αναπαραμέτρηση $\beta = \alpha \circ h$ ως προς μήκος τόξου και ορίζουμε $\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(h^{-1}(t))$.*

Σημείωση 1.7 Ο παραπάνω ορισμός είναι καλός, δηλ. ανεξάρτητος της επιλογής της θετικής αναπαραμέτρησης, λόγω της πρότασης 1.4.

Πρόταση 1.5 *Εστω $\beta = \alpha \circ h$ μια αναπαραμέτρηση της α.*
1. Αν η αναπαραμέτρηση είναι θετική τότε $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(h(s))$.
2. Αν η αναπαραμέτρηση είναι αρνητική τότε $\kappa_\beta(s) = -\kappa_\alpha(h(s))$.

Πρόταση 1.6 *Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ επίπεδη καμπύλη με $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Τότε*

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{x_1'(t)\, x_2''(t) - x_2'(t)\, x_1''(t)}{(\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2})^3}\ .$$

1.2.2 Στέρεες κινήσεις του επιπέδου - καμπυλότητα

Αρχίζουμε με κάποιους συμβολισμούς με διανύσματα: Αν $\vec{v}=< a_1,\ldots,a_n >$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ τότε τό αντιστοιχούμε στον πινακα στήλη $v=(a_1,\ldots,a_n)^t$. Οταν ένα διάνυσμα $\vec{v}$ το σκεφτόμαστε ως πίνακα θα το συμβολίζομε απλά με v. Κάτω από αυτή την αντιστοιχιση, το εσωτερικό γινόμενο $\vec{v}\cdot\vec{w}$ δύο διανυσμάτων ισούται με το γινόμενο πινάκων $v^t w$, δηλ. $\vec{v}\cdot\vec{w}=v^t w$.

Σημείωση 1.8 Μια στέρεα κίνηση του επιπέδου είναι μια απεικόνιση $\Phi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ που ορίζεται ως εξής. Θεωρούμε τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ ως διανύσματα $\vec{v}=< x_1,x_2 >$. Τότε

$$\Phi(v)=Av+v_0,$$

όπου A ένας 2×2 πίνακας με $AA^t=I$ (δηλ. A ορθογώνιος πίνακας) και $\vec{v_0}$ ένα σταθερό διάνυσμα. Σημειώνουμε ότι ένας ορθογώνιος πίνακας έχει $\det A=\pm1$. Αν $\det A=1$ αντιστοιχεί σε στροφή και όταν $\det A=-1$ αντιστοιχεί σε στροφή + ανακλαση. Συνεπώς μια στέρεα κινήση του επιπέδου είναι είτε μια στροφη + μεταφορά, είτε, μια στροφή + ανάκλαση + μεταφορά.

Ορισμός 1.8 *Αν $\alpha:I\longrightarrow\mathbb{R}^2$ μια επίπεδη καμπύλη και $\Phi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ μια στέρεα κίνηση του επιπέδου, τότε η καμπύλη $\beta=\Phi\circ\alpha$ λέγεται στέρεα μετατόπιση της α.*

Πρόταση 1.7 *Εστω $\alpha:I\longrightarrow\mathbb{R}^2$ μια επίπεδη καμπύλη και $\Phi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ μια στέρεα κίνηση του επιπέδου που αντιστοιχεί στον ορθογώνιο πίνακα A.*
1. Αν $\det A=1$ τότε $\kappa_\alpha=\kappa_{\Phi\circ\alpha}$.
2. Αν $\det A=-1$ τότε $\kappa_\alpha=-\kappa_{\Phi\circ\alpha}$.

1.2.3 Ευκλείδεια κατάταξη επίπεδων καμπυλών

Θεώρημα 1.1 *Εστω $\kappa:I\longrightarrow\mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε*
1. Υπάρχει καμπύλη $\alpha:I\longrightarrow\mathbb{R}^2$ παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\kappa_\alpha=\kappa$.
2. Αν $\beta:I\longrightarrow\mathbb{R}^2$ καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\kappa_\beta=\kappa$, τότε υπάρχει μια στέρεα κίνηση του επιπέδου $\Phi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ που αντιστοιχεί στον ορθογώνιο πίνακα A, με $\det A=+1$, τέτοια ώστε $\beta=\Phi\circ\alpha$.

1.3 Καμπύλες του χώρου

1.3.1 Εξωτερικό γινόμενο

Υπενθυμίζουμε κάποια πράγματα για το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων του χώρου. Εστω $\vec{v}$, $\vec{w}$ διανύσματα του χώρου. Τότε το εξωτερικό γινόμενο $\vec{v}\times\vec{w}$ είναι ένα διάνυσμα του χώρου που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες.

1. Το $\vec{v}\times\vec{w}$ είναι κάθετο στα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.
2. $\|\vec{v}\times\vec{w}\|=\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\sin\theta$, όπου θ η μικρότερη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{w}$.
3. $\|\vec{v}\times\vec{w}\|^2=\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2-(\vec{v}\cdot\vec{w})^2$.

4. $\vec{v} \times \vec{w}= 0$ αν και μόνον αν τα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι συγγραμμικά. Οταν δεν είναι συγγραμμικά, τότε το $\vec{v} \times \vec{w}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ και η φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.

5. Αν $\vec{v}=< x_1, x_2, x_3 >$, $\vec{w}=< y_1, y_2, y_3 >$ τότε $\vec{v} \times \vec{w}=< x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1 >$.

6. $\vec{z} \times(\vec{v} + \vec{w}) =\vec{z} \times \vec{v} + \vec{z} \times \vec{w}$. Επίσης, αν $c \in \mathbb{R}$ τότε $c\ (\vec{v} \times \vec{w}) = (c\ \vec{v}) \times \vec{w}=\vec{v} \times(c\ \vec{w})$.

Ορίζουμε επίσης το μικτό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{z}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ως το $\vec{z} \cdot(\vec{v} \times \vec{w})$. Ισχύει ότι

$$\vec{z} \cdot(\vec{v} \times \vec{w}) =\vec{v} \cdot(\vec{w} \times \vec{z}) =\vec{w} \cdot(\vec{z} \times \vec{v}).$$

Επίσης, αν $\vec{z}=< z_1, z_2, z_3 >$, $\vec{v}=< x_1, x_2, x_3 >$, $\vec{w}=< y_1, y_2, y_3 >$ τότε

$$\vec{z} \cdot(\vec{v} \times \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Καμπυλότητα καμπυλών του χώρου

Θα μελετήσουμε τώρα καμπύλες του χώρου.

Ορισμός 1.9 *Εστω α καμπύλη του χώρου παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου. Τότε ορίζουμε την καμπυλότητα της α από τον τύπο $\kappa_\alpha(s) = ||\alpha''(s)||$.*

Σημείωση 1.9

1. Ο παραπάνω ορισμός είναι συμβατός με την περίπτωση του ορισμού της επίπεδης καμπύλης, μέχρι προσήμου. Ο ορισμός της καμπυλότητας που δώσαμε για επίπεδες καμπύλες δεν μπορεί να μεταφερθεί για καμπύλες στον χώρο διότι για δύο διανύσματα του χώρου δεν μπορούμε να ορίσουμε γωνία των διανυσμάτων με 'φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού'.

2. Η καμπυλότητα δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση. Δηλ. αν $\beta = \alpha \circ h$ είναι μια αναπαραμέτρηση της α που είναι και αυτή παραμέτρηση ως προς μήκος τόξου τότε $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(h(s))$.

Αν τώρα η καμπύλη α έχει αυθαίρετη παραμέτρηση τότε ορίζουμε την καμπυλότητά της με την βοήθεια μιας θετικής αναπαραμέτρησης $\beta = \alpha \circ h$ ως προς μήκος τόξου, δηλ. ορίζουμε $\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(s)$, όπου $s = h^{-1}(t)$. Πρακτικός τρόπος υπολογισμού της καμπυλότητας δίδεται από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.8 *Εστω α καμπύλη με αυθαίρετη παραμέτρηση. Τότε η καμπυλότητά της δίδεται από τον τύπο*

$$\kappa_\alpha = \frac{||\alpha' \times \alpha''||}{||\alpha'||^3}.$$

Σημειώνουμε ότι αν η α είναι παραμετισμένη ως προς μήκος τόξου, τότε ο παραπάνω τύπος απλοποιείται στον τύπο-ορισμό της καμπυλότητας $\kappa_\alpha = ||\alpha''||$.

1.3.3 Ισομετρίες του χώρου-καμπυλότητα

Μια ισομετρία του χώρου είναι μια απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως εξής. Θεωρούμε τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ ως διανύσματα $\overrightarrow{v}$. Τότε

$$\Phi(v) = Av + v_0,$$

όπου A ένας 3×3 πίνακας με $AA^t = I$ (δηλ. A ορθογώνιος πίνακας) και $\overrightarrow{v_0}$ ένα σταθερό διάνυσμα. Θα έχουμε ότι $\det A = \pm 1$.

Πρόταση 1.9 *Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη του χώρου και $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια ισομετρία του χώρου. Τότε $\kappa_\alpha = \kappa_{\Phi o \alpha}$.*

1.3.4 Πλαίσιο του Frenet

Εστω α καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\alpha''(s) \neq 0$, $\forall s$. Γιά κάθε s ορίζουμε τρία μοναδιαία διανύσματα που αποτελούν ορθοκανονική βάση στο σημείο $\alpha(s)$ του χώρου. Αυτά είναι τα εξής: $\overrightarrow{t}_\alpha = \overrightarrow{t}_\alpha (s) := \alpha'(s)$ (το *εφαπτόμενο διάνυσμα*), $\overrightarrow{\eta}_\alpha = \overrightarrow{\eta}_\alpha (s) := \frac{\alpha''(s)}{||\alpha''(s)||}$ (το *κύριο κάθετο διάνυσμα*) και $\overrightarrow{b}_\alpha = \overrightarrow{b}_\alpha (s) := \overrightarrow{t} (s) \times \overrightarrow{\eta} (s)$ (το *δευτερεύον κάθετο διανυσμα* ή *δικάθετος*). Τα παραπάνω διανύσματα αποτελούν σε κάθε σημείο $\alpha(s)$ το λεγόμενο *πλαίσιο Frenet* της καμπύλης. Οταν η καμπύλη α έχει αυθαίρετη παραμέτρηση τότε ορίζουμε τα παραπάνω διανύσματα με την βοήθεια μιας θετικής αναπαραμέτρησης $\beta = \alpha \circ h$ της α ως προς μήκος τόξου. Θα έχουμε $\overrightarrow{t}_\alpha (t) = \overrightarrow{t}_\beta (s)$, $\overrightarrow{\eta}_\alpha (t) = \overrightarrow{\eta}_\beta (s)$, $\overrightarrow{b}_\alpha (t) = \overrightarrow{b}_\beta (s)$, όπου $s = h^{-1}(t)$. Ο πρακτικός τρόπος που υπολογίζουμε το πλαίσιο Frenet για καμπύλη α με αυθαίρετη παραμέτρηση βασίζεται στους παρακάτω τύπους: $\overrightarrow{t}_\alpha = \frac{\alpha'}{||\alpha'||}$, $\overrightarrow{b}_\alpha = \frac{\alpha' \times \alpha''}{||\alpha' \times \alpha''||}$, $\overrightarrow{\eta}_\alpha = \overrightarrow{b}_\alpha \times \overrightarrow{t}_\alpha$.

1.3.5 Στρέψη καμπύλης

Ο ορισμός της στρέψης μιας καμπύλης παραμετρισμένης ως προς μήκος τόξου βασίζεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.10 *Εστω α καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\alpha''(s) \neq 0$, $\forall s$. Τότε $\overrightarrow{b}'_\alpha (s) = \lambda(s) \overrightarrow{\eta}_\alpha (s)$, $\lambda(s) \in \mathbb{R}$.*

Ορισμός 1.10 *Εστω α καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\alpha''(s) \neq 0$, $\forall s$ δηλ. $\kappa_\alpha(s) > 0$, $\forall s$. Τότε ορίζουμε ως στρέψη της α την $\tau_\alpha(s) = -\lambda(s)$, όπου το λ ορίστικε στην παραπάνω πρόταση 1.10. Επομένως θα έχουμε $\overrightarrow{b}'_\alpha (s) = -\tau_\alpha(s) \overrightarrow{\eta}_\alpha (s)$.*

Αν τώρα η α, με $\kappa_\alpha(t) > 0$, $\forall t$ έχει αυθαίρετη αναπαραμέτρηση τότε ορίζουμε την στρέψη, όπως και στην περίπτωση της καμπυλότητας, δια μέσου της στρέψης μιας θετικής αναπαραμέτρησης της α ως προς μήκος τόξου. Η στρέψη κατά κάποιο τρόπο μετράει το πόσο απέχει η καμπύλη από το να είναι μια επίπεδη καμπύλη, δηλ. να ανήκει σε κάποιο επίπεδο του χώρου. Σχετικά με αυτό έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.11 *Εστω α καμπύλη με $\kappa_\alpha(t) > 0, \ \forall t$. Τότε η α είναι επίπεδη αν και μόνον αν $\tau_\alpha(t) = 0, \forall t$. Σε αυτήν την περίπτωση, το διανυσμα $\vec{b}_\alpha\ (t) = \vec{q}$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του t) και είναι το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου στο οποίο ανήκει η καμπύλη α.*

Πρακτικός τρόπος υπολογισμού της στρέψης δίδεται από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.12 *1. Εστω α καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μηκος τόξου. Τότε η στρέψη της δίδεται από τον τύπο $\tau_\alpha = \frac{\alpha'\cdot(\alpha''\times\alpha''')}{||\alpha''||^2}$.*
2. Γενικότερα, αν η καμπύλη α έχει αυθαίρετη παραμέτρηση τότε η στρέψη της δίδεται από τον τύπο $\tau_\alpha = \frac{\alpha'\cdot(\alpha''\times\alpha''')}{||\alpha'\times\alpha''||^2}$.

Τέλος η συμπεριφορά της στρέψης κατω από ισομετρίες του χώρου δίδεται από την εξής πρόταση.

Πρόταση 1.13 *Εστω $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη του χώρου και $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια ισομετρία του χώρου που αντιστοιχεί στον ορθογώνιο πίνακα A.*
1. Αν $\det A = 1$ τότε $\tau_\alpha = \tau_{\Phi\circ\alpha}$.
2. Αν $\det A = -1$ τότε $\tau_\alpha = -\tau_{\Phi\circ\alpha}$.

1.3.6 Τύποι του Frenet

Εστω α καμπύλη παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\kappa_\alpha(s) > 0, \forall s$. Οι τύποι του Frenet είναι οι εξής.

$$\begin{aligned} \vec{t}'_\alpha &= \kappa_\alpha \vec{\eta}_\alpha \\ \vec{\eta}'_\alpha &= -\kappa_\alpha \vec{t}_\alpha + \tau_\alpha \vec{b}_\alpha \\ \vec{b}'_\alpha &= -\tau_\alpha \vec{\eta}_\alpha \end{aligned}$$

Οταν η α έχει αυθαίρετη παραμέτρηση τότε οι τύποι του Frenet είναι οι εξής.

$$\begin{aligned} \vec{t}'_\alpha &= \kappa_\alpha v \vec{\eta}_\alpha \\ \vec{\eta}'_\alpha &= -\kappa_\alpha v \vec{t}_\alpha + \tau_\alpha v \vec{b}_\alpha \\ \vec{b}'_\alpha &= -\tau_\alpha v \vec{\eta}_\alpha, \end{aligned}$$

όπου $v = ||\alpha'||$ η ταχύτητα.

1.3.7 Ευκλείδεια κατάταξη καμπυλών του χώρου

Θεώρημα 1.2 *Εστω $\kappa, \tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις με $\kappa(s) > 0, \forall s$. Τότε*
1. Υπάρχει καμπύλη $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\kappa_\alpha = \kappa$ και $\tau_\alpha = \tau$.
2. Αν $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου με $\kappa_\beta = \kappa$ και $\tau_\beta = \tau$, τότε υπάρχει μια ισομετρία του χώρου $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που αντιστοιχεί στον ορθογώνιο πίνακα A, με $\det A = +1$, τέτοια ώστε $\beta = \Phi \circ \alpha$.

2 Επιφάνειες

2.1 Επανάληψη από απειροστικό λογισμό

Υπενθυμίζουμε σε αυτήν την παράγραφο ορισμένα θεωρήματα και συμβολισμούς από τον απειροστικό λογισμό. Εστω $U_n \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό του $\mathbb{R}^n$. Μια απεικόνιση $\Phi : U_n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ έχει την μορφή $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$, όπου $f_i(x_1, \ldots, x_n) : U_n \longrightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις n μεταβλητών. Υποθέτουμε από εδώ και πέρα ότι όλες οι απεικονίσεις και συναρτήσεις είναι (απείρως) διαφορίσιμες. Ο Ιακωβιανός πίνακας της Φ στο σημείο $P = (a_1, \ldots, a_n)$ είναι ο $m \times n$ πίνακας

$$D\Phi_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & .... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ .... & .... & .... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & .... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}.$$

Καθώς το P μεταβάλλεται στο U_n, ο παραπάνω πίνακας, που τον συμβολίζουμε με $D\Phi$, έχει ως στοιχεία τις συναρτήσεις $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$. Ουσιαστικά ο Ιακωβιανός πίνακας $D\Phi$ είναι η συλλογή όλων των μερικών παραγώγων που σχετίζονται με την απεικόνιση Φ.

Εστω τώρα $V_m \subseteq \mathbb{R}^m$ ανοικτό του $\mathbb{R}^m$ που περιέχει το πεδίο τιμών της Φ και $\Psi : V_m \longrightarrow \mathbb{R}^s$ μια απεικόνιση. Τότε μπορώ να πάρω την σύνθεση $\Psi \circ \Phi : U_n \longrightarrow V_m \longrightarrow \mathbb{R}^s$. Αν $P \in U_n$ τότε έχουμε

$$D(\Psi \circ \Phi)_P = D\Psi_{\phi(P)} \cdot D\Phi_P \ . \tag{1}$$

Τέλος, έστω D και D' δύο ανοικτα του $\mathbb{R}^n$ και $h : D \longrightarrow D'$ μια διαφορίσιμη, 1-1, επί απεικόνιση. Τότε η απεικόνιση $h^{-1} : D' \longrightarrow D$ είναι διαφορίσιμη αν και μόνον αν $\det Dh_P \neq 0$, για κάθε $P \in D$. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε ότι $D(h^{-1})_Q = (Dh_{h^{-1}(Q)})^{-1}$.

2.2 Επιφάνειες σε παραμετρική μορφή

Μια επιφάνεια S του $\mathbb{R}^3$, σε παραμετρική μορφή, είναι, κατ᾽ αρχάς, μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, όπου D είναι ένα ανοικτό συνεκτικό χωρίο του $\mathbb{R}^2$, π.χ. $D = \mathbb{R}^2$, το εσωτερικό ενός δίσκου, το εσωτερικό ενός παραλληλογράμμου. Το ‘κατ᾽ αρχάς’ στον παραπάνω ορισμό θα το διευκρινίσουνε στην συνέχεια.

Σημείωση 2.1 Από εδώ και πέρα θα συμβολίζουμε με D ένα ανοικτό συνεκτικό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ όπως παραπάνω.

Η απεικόνιση Φ έχει την μορφή $\Phi(u, v) = (x_1(u, v),\ x_2(u, v),\ x_3(u, v))$. Συμβολίζουμε με $\vec{X}\,(u, v)$ το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης. Πολλές φορές θα αναφερόμαστε καταχρηστικά στην εικόνα $\Phi(D)$ ώς επιφάνεια στον χώρο. Πρέπει όμως να έχουμε υπ᾽ όψιν ότι η επιφάνεια, σε παραμετρική μορφή όπως την ορίσαμε, δεν είναι μόνον το σύνολο $\Phi(D)$ αλλά και η παραμέτρισή του που καθορίζεται από την απεικόνιση Φ.

Παράδειγμα 2.1 Αν $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών τότε η επιφάνεια $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ είναι το γράφημα της f.

Παράδειγμα 2.2 Η επιφάνεια $\Phi : \mathbb{R}\times(0,h) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(v,z) = (R\cos v, R\sin v, z)$, όπου $R>0$, $h>0$, είναι ένας κύλινδρος με ακτίνα R, ύψος h και άξονα συμμετρίας τον z-άξονα.

Παράδειγμα 2.3 Εστω O η αρχή των αξόνων και P σημείο του χώρου. Εστω $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$ διανύσματα του χώρου γραμμικώς ανεξάρτητα. Τότε η επιφάνεια με διάνυσμα θέσης $\vec{X}\,(u,v) = \vec{OP} + u\,\vec{w_1} + v\,\vec{w_2}$ είναι το επίπεδο που περιέχει το σημείο P και εκτείνεται από τα διανύσματα $\vec{w_1}$ και $\vec{w_2}$.

Παράδειγμα 2.4 Αν $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση μιας μεταβλητής με $z = f(x)$ τότε η απεικόνιση $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v, f(u))$ ορίζει την επιφάνεια που προκύπτει όταν περιστρέψουμε το γράφημα της f γύρω από τον z-άξονα. Σε αυτό το παράδειγμα, v είναι η γωνία που σχηματίζει ο x-άξονας με την προβολή του διανύσματος θέσης στο xy-επίπεδο και u είναι η απόσταση του σημείου της επιφάνειας από τον z-άξονα. Το D είναι το $(0,1)\times\mathbb{R}$. Η παραπάνω επιφάνεια περιγράφεται, επίσης, και από την απεικόνιση $\Psi : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Psi(x,y) = (x,y,f(\sqrt{x^2+y^2}))$,όπου $D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0 < x^2+y^2 < 1\}$.

Παράδειγμα 2.5 Η επιφάνεια $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u,v) = (R\cos u\cos v,\ R\cos u\sin v,\ R\sin u)$, όπου $R>0$, είναι μιά σφαίρα ακτίνας R. Εδώ, v είναι η γωνία που σχηματίζει ο x-άξονας με την προβολή του διανύσματος θέσης στο xy-επίπεδο και u είναι η γωνία που σχηματίζει η προβολή του διανύσματος θέσης στο xy-επίπεδο με τό διάνυσμα θέσης.

Παρατηρώντας τα επόμενα παραδείγματα βλέπουμε ότι ο παραπάνω ορισμός πολλές φορές δεν ανταποκρίνεται σε αυτό που διαισθητικά κατανοούμε ως μια (λεία) επιφάνεια.

Παράδειγμα 2.6 Η απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u,v) = (0,0,0)$ έχει ως εικόνα το σημείο $(0,0,0)$ που προφανώς δεν μπορεί να θεωρηθεί επιφάνεια.

Παράδειγμα 2.7 Αν στο παραπάνω Παράδειγμα 2.3, πάρουμε $\vec{w_1}=\vec{w_2}$ τότε η απεικόνιση Φ δίδεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{X}\,(u,v) = \vec{OP} + (u+v)\,\vec{w_1}$ που παριστά την ευθεία που περνάει από το σημείο P και έχει την διεύθυνση του διανύσματος $\vec{w_1}$. Προφανώς ούτε αυτό μπορεί να θεωρηθεί επιφάνεια.

Παράδειγμα 2.8 Η απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(r,\phi) = (r\cos\phi,\ r\sin\phi,\ r)$ είναι ένας κώνος με κορυφή στο σημείο $(0,0,0)$ που δεν μπορεί να θεωρηθεί ως *λεία* επιφάνεια.

Πρέπει συνεπώς να βελτιώσουμε τον παραπάνω ορισμό, βάζοντας μια επι πλέον συνθήκη ομαλότητας, ώστε να αντιστοιχεί σε αυτό που διαισθητικά κατανοούμε ως μια (λεία) επιφάνεια. Η συνθήκη αυτή είναι το ανάλογο της συνθήκης 'κανονικότητας' των καμπυλών, βλ. Ορισμό 1.3, και ορίζεται με την χρήση των καμπυλών της επιφάνειας. Εστω, λοιπόν, $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια επιφάνεια και $\alpha_1 : I \longrightarrow D$ μια επίπεδη καμπύλη με ίχνος μέσα στο χωρίο D. Η καμπύλη δίδεται από τύπο της μορφής $\alpha_1(t) = (u(t), v(t))$. Τότε η σύνθεση $\alpha = \Phi\circ\alpha_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, με $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$, είναι μια καμπύλη του χώρου με ίχνος πάνω στην επιφάνεια. Τέτοιες καμπύλες λέγονται *επιφανειακές καμπύλες*. Η συνθήκη ομαλότητας που βάζουμε για την επιφάνεια είναι η εξής:

ΣΥΝΘΗΚΗ (Κ): *Αν η* $\alpha_1 : I \longrightarrow D$ *είναι μια κανονική καμπύλη τότε πρέπει και η επιφανειακή καμπύλη* $\alpha := \Phi \circ \alpha_1$ *να είναι μια κανονική καμπύλη.*

Επιφάνειες που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη λέγονται κανονικές επιφάνειες και όπως και στην περίπτωση των καμπυλών όταν αναφερόμαστε σε επιφάνειες θα ενοούμε κανονικές επιφάνειες. Εχουμε επομένως τον ορισμό:

Ορισμός 2.1 *Μια (κανονική) επιφάνεια* S *του* $\mathbb{R}^3$*, σε παραμετρική μορφή, είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση* $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$*, όπου* D *είναι ένα ανοικτό συνεκτικό χωρίο του* $\mathbb{R}^2$*, που ικανοποιεί την συνθήκη (Κ).*

Ας επαληθεύσουμε τώρα ότι κανένα από τα παραδείγματα 2.6, 2.7, 2.8 δεν ικανοποιεί την συνθήκη (Κ). Για το παράδειγμα 2.6, πάρε ώς $\alpha_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ μια οποιαδήποτε κανονική καμπύλη. Τότε η α είναι σταθερή και άρα όχι κανονική. Για το παράδειγμα 2.7, πάρε ώς $\alpha_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ την $\alpha_1(t) = (t, -t)$. Τότε πάλι η α είναι σταθερή. Για το παράδειγμα 2.8, πάρε ώς $\alpha_1 : I \longrightarrow \mathbb{R} \times (0, h)$ την $\alpha_1(t) = (0, v)$. Τότε, επίσης, η α είναι σταθερή. Παρατηρούμε όμως ότι και στο παράδειγμα 2.5 της σφαίρας, παρ' όλο που τα πράγματα φαίνονται εντάξει, στην πραγματικότητα υπάρχει πρόβλημα στα σημεία $N = \Phi(\frac{\pi}{2}, 0)$ και $S = \Phi(-\frac{\pi}{2}, 0)$. Πράγματι, πάρε ώς $\alpha_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ την $\alpha_1(t) = (\pm\frac{\pi}{2}, t)$. Τότε πάλι η α είναι σταθερή. Το πρόβλημα που υπάρχει εδώ δεν είναι πρόβλημα της σφαίρας η οποία είναι ένα 'ωραίο' υποσύνολο του χώρου, αλλά του τρόπου παραμέτρισής της, δηλ. της απεικόνισης Φ που την περιγράφει. Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία του προβήματος σε αυτά τα σημεία θα το δούμε λίγο παρακάτω.

Στην συνέχεια θα βρούμε μια πιο πρακτική ερμηνεία της συνθήκης (Κ). Εστω $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια επιφάνεια του χώρου με $\Phi(u, v) = (x_1(u, v),\ x_2(u, v),\ x_3(u, v))$. Το διάνυσμα θέσης $\vec{X}\,(u, v)$ έχει τις ίδιες συντεταγμένες δηλ. $\vec{X}\,(u, v) =< x_1(u, v),\ x_2(u, v),\ x_3(u, v) >$. Αυτό είναι μια διανυσματική συνάρτηση. Συμβολίζομε τις μερικές παραγώγους της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{X}\,(u, v)$ ως εξής

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u, v) &= < \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v),\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v),\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u, v) >, \\
\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u, v) &= < \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v),\ \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v),\ \frac{\partial x_3}{\partial v}(u, v) > .
\end{aligned}$$

Αν $\alpha_1 : I \longrightarrow D$ μια καμπύλη με $\alpha_1(t) = (u(t), v(t))$, υπολογίζουμε το διάνυσμα ταχύτητας της επιφανειακής καμπύλης $\alpha = \Phi \circ \alpha_1$. Εχουμε $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$ και από τον κανόνα παραγώγισης σύνθετης απεικόνισης, πιο συγκεκριμένα από τον τύπο (1), έχουμε ότι

$$\alpha'(t) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u(t), v(t)) \cdot v'(t)\ .$$

Σε συντομογραφία,

$$\alpha' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}\ u' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}\ v'\ . \tag{2}$$

Σημείωση 2.2 Εστω $(a,b) \in D$. Η γεωμετρική ερμηνεία των διανυσμάτων $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b)$ και $\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b)$ είναι η εξής: Παίρνουμε τις καμπύλες $\alpha_1 : I \longrightarrow D$ και $\alpha_2 : I \longrightarrow D$ με $\alpha_1(t) = (a+t, b)$ και $\alpha_2(t) = (a, b+t)$. Τότε από τον τύπο (2) έχουμε ότι $(\Phi\circ\alpha_1)'(0) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b)$ και $(\Phi \circ \alpha_2)'(0) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b)$. Πιο γενικά, αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, όπου $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ και κατασκευάσουμε την καμπύλη $\alpha_{\lambda,\mu} : I \longrightarrow D$ με $\alpha_{\lambda,\mu}(t) = (a + \lambda t, b + \mu t)$ τότε $(\Phi \circ \alpha_{\lambda,\mu})'(0) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b) \cdot \lambda + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b) \cdot \mu$.

Οι καμπύλες $\alpha_{\lambda,\mu}$ της παραπάνω σημείωσης είναι κανονικές. Για να είναι λοιπόν η επιφάνεια Φ κανονική θά πρέπει, για κάθε $(a,b) \in D$, να έχουμε $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b) \cdot \lambda + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b) \cdot \mu \neq \vec{0}, \forall(\lambda,\mu) \neq (0,0)$. Δηλ. τα διανύσματα $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b)$, $\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b)$ θα πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, για κάθε $(a,b) \in D$. Από την άλλη μεριά, αν ισχύει το τελευταίο, τότε από τον τύπο (2) συμπεραίνουμε ότι αν η καμπύλη α_1 είναι κανονική, δηλ. τα $u'(t), v'(t)$ όχι και τα δύο μηδέν $\forall t \in I$, τότε $\alpha'(t) \neq \vec{0}, \forall t \in I$, δηλ. η καμπύλη $\alpha = \Phi \circ \alpha_1$ είναι κανονική. Εχουμε επομένως την παρακάτω πρόταση

Πρόταση 2.1 *Η επιφάνεια S που δίδεται σε παραμετρική μορφή από την $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι κανονική, αν και μόνον αν, τα διανύσματα $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b)$, $\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, για κάθε $(a,b) \in D$. Ισοδύναμα, αν και μόνον αν, $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b) \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b) \neq \vec{0}$ για κάθε $(a,b) \in D$.*

Οι επιφάνειες που μελετούμε θα έχουν την παραπάνω ιδιότητα. Σε κάθε σημείο της επιφάνειας ορίζουμε τα παρακάτω:

Ορισμός 2.2 *Εστω επιφάνεια S που ορίζεται από την $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ και $P = \Phi(a,b)$ ένα σημείο της.*
1. (Μοναδιαίο) κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S στο σημείο P είναι το

$$\vec{N}(a,b) = \frac{\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b) \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b)}{||\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b) \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b)||} \quad .$$

2. Εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S στο σημείο P είναι το επίπεδο που διέρχεται από το P και έχει ως κάθετο διάνυσμα το $\vec{N}(a,b)$.
3. Εφαπτόμενο διάνυσμα της επιφάνειας S στο σημείο P είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο $\vec{N}(a,b)$.

Σημείωση 2.3 Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο P της επιφάνειας S αποτελεί έναν γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2. Αν εφαρμόσουμε ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο P τότε, ως διάνυσμα κάθετο στο $\vec{N}(a,b)$, θα είναι διάνυσμα του εφαπτόμενου επιπέδου. Αν λοιπόν το μεταφέρουμε στην αρχή των αξόνων τότε θα βρίσκεται στο παράλληλο επίπεδο του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο P που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επομένως ο γραμμικός χώρος των εφαπτόμενων διανυσμάτων αντιστοιχεί στον διδιάστατο γραμμικό χώρο που ορίζεται ως η παράλληλη μεταφορά στην αρχή των αξόνων του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο P . Θα συμβολίζουμε αυτόν τον γραμμικό χώρο με $T_P S$ και θά τον ονομάζουμε *επίπεδο των εφαπτόμενων διανυσμάτων της S στο P*. Παρατηρούμε ότι από την πρόταση 2.1 το $T_P S$ έχει βάση, ως γραμμικός χώρος, τα διανύσματα $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b)$, $\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b)$.

Παράδειγμα 2.9 Εστω S ο κύλινδρος $\Phi : \mathbb{R} \times (0,h) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(v,z) = (R\cos v, R\sin v, z)$, όπου $R > 0$, όπως στο παράδειγμα 2.2. Εστω $P = \Phi(\frac{\pi}{2}, 0) = (0, R, 0)$. Τότε $\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(\frac{\pi}{2}, 0) =< -R, 0, 0 >$ και $\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}(\frac{\pi}{2}, 0) =< 0, 0, 1 >$. Συνεπώς $\vec{N}\ (\frac{\pi}{2}, 0) =< 0, 1, 0 >$. Το εφαπτόμενο επίπεδο στο P είναι το $y = R$, το δε αντίστοιχο επίπεδο των εφαπτόμενων διανυσμάτων είναι το $y = 0$.

Παράδειγμα 2.10 Στο παράδειγμα 2.1 του γραφήματος S συνάρτησης, με $\Phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{X}}{\partial u} &= < 1,\ 0,\ \frac{\partial f}{\partial u} >, \\
\frac{\partial \vec{X}}{\partial v} &= < 0,\ 1,\ \frac{\partial f}{\partial v} >, \\
\vec{N} &= \frac{< -\frac{\partial f}{\partial u},\ -\frac{\partial f}{\partial uv},\ 1 >}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2}} .
\end{aligned}$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $P = (a, b, f(a,b))$ είναι το $-\frac{\partial f}{\partial u}(a,b)(x-a) - \frac{\partial f}{\partial v}(a,b)(y-b) + (z - f(a,b)) = 0$, το δε επίπεδο $T_P S$ των εφαπτόμενων διανυσμάτων του γραφήματος στο σημείο P είναι το $-\frac{\partial f}{\partial u}(a,b)x - \frac{\partial f}{\partial v}(a,b)y + z = 0$.

Παράδειγμα 2.11 Ας θεωρήσουμε τώρα την σφαίρα σε παραμετρική μορφή όπως στο παράδειγμα 2.5. Τότε στα σημεία $N = \Phi(\frac{\pi}{2}, 0)$ και $S = \Phi(-\frac{\pi}{2}, 0)$ έχουμε ότι $\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(\pm\frac{\pi}{2}, 0) =< 0, 0, 0 >$. Συνεπώς αν προσπαθήσουμε σε αυτά τα σημεία να ορίσουμε το κάθετο διάνυσμα όπως στον ορισμό 2.2 τότε παίρνουμε το μηδενικό διάνυσμα. Ομως η σφαίρα, ως γεωμετρικό σχήμα, έχει προφανώς μη μηδενικό κάθετο διάνυσμα στα παραπάνω σημεία. Απλώς η παραμέτριση που έχουμε πάρει δεν είναι καλή σε αυτα τα σημεία και έτσι δεν μπορούμε να ορίσουμε το κάθετο διάνυσμα με την βοήθεια της συγκεκριμένης παραμέτρησης. Με αυτήν την έννοια η παραμετρισμένη επιφάνεια δεν είναι κανονική. Σημειώνουμε ότι αν περιορίσουμε την Φ στο χωρίο $D = (-\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ τότε η επιφάνεια είναι κανονική (βέβαια η εικόνα αυτής της απεικόνισης είναι η σφαίρα εκτός των σημείων N, S). Ας υπολογίσουμε το κάθετο διάνυσμα στα σημεία της σφαίρας (διαφορετικά από τα N, S). Εχουμε,

$$\begin{aligned}
\Phi(u,v) &= (R\cos u\cos v,\ R\cos u\sin v,\ R\sin u), \\
\frac{\partial \vec{X}}{\partial u} &= < -R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, R\cos u > \\
\frac{\partial \vec{X}}{\partial v} &= < -R\cos u\sin v, R\cos u\cos v, 0 > \\
\vec{N} &= - < \cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u >= -\frac{1}{R}\vec{X} .
\end{aligned}$$

Συνεπώς το κάθετο διάνυσμα στα σημεία της σφαίρας έχει την διεύθυνση της ακτίνας, με φορα προς το κέντρο της σφαίρας.

3.3 Μετρήσεις σε επιφάνειες - η πρώτη θεμελειώδης μορφή

3.3.1 Μήκη επιφανειακών καμπυλών

Εστω ότι η επιφάνεια S δίδεται από την $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ και έστω $\alpha_1 : I \longrightarrow D$ μια καμπύλη με $\alpha_1(t) = (u(t), v(t))$. Τότε για την επιφανειακή καμπύλη $\alpha = \Phi \circ \alpha_1$ έχουμε από τον τύπο (2) ότι $\alpha' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} u' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} v'$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} ||\alpha'||^2 &= (\frac{\partial \vec{X}}{\partial u} u' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} v') \cdot (\frac{\partial \vec{X}}{\partial u} u' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} v') \\ &= ||\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}||^2 u'^2 + 2\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}\frac{\partial \vec{X}}{\partial v} u'v' + ||\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}||^2 v'^2 . \end{aligned}$$

Συνεπώς το μήκος της επιφανειακής καμπύλης α από το t_1 στο t_2 δίδεται από

$$L_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{||\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}||^2 \, u'^2 + 2\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}\frac{\partial \vec{X}}{\partial v} \, u'v' + ||\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}||^2 \, v'^2} \; dt \quad ,$$

όπου οι μερικές παράγωγοι εκτιμούνται στα σημεία $u'(t), v'(t)$ και οι u', v' στο t. Εστω τώρα

$$\begin{aligned} E(u,v) &= ||\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u,v)||^2 \, , \\ F(u,v) &= \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u,v) \, , \\ G(u,v) &= ||\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u,v)||^2 \, . \end{aligned}$$

Συνεπώς αν $\alpha_1 : I \longrightarrow D$ μια καμπύλη τότε για να υπολογίσω το μήκος της επιφανειακής καμπύλης $\Phi \circ \alpha_1$, το μόνο που χρειάζεται να γνωρίζω είναι, εκτός από την α_1, τις τρείς παραπάνω συναρτήσεις E, F, G.

Σημείωση 3.4 Εστω $(a, b) \in D$. Συμβολίζουμε με $T_{(a,b)}D$ το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$ τα οποία τα θεωρούμε ότι αρχίζουν από το (a, b). Συμβολίζουμε τα στοιχεία του $T_{(a,b)}D$ με $< u', v' >$. Ο συμβολισμός ωφείλεται στο ότι θέλουμε να σκεπτόμαστε τα στοιχεία του $T_{(a,b)}D$ ως διανύσματα ταχύτητας στο (a, b) καμπυλών $\alpha_1 : I \longrightarrow D$. Αυτός προφανώς είναι ένας διδιάστατος γραμμικός χώρος ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^2$. Αν $P = \Phi(a, b)$, σημειώνουμε ότι υπάρχει μια φυσιολογική ισομορφία μεταξύ των γραμμικών χώρων $T_{(a,b)}D$ και $T_P S$ που δίδεται από τον γραμμικό ισομορφισμό που στέλνει το $< u', v' > \in T_{(a,b)}D$ στο $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a, b)u' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a, b)v' \in T_P S$. Το ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι ισομορφισμός προκύπτει από το γεγονός ότι τα διανύσματα $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a, b)$, $\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a, b)$ είναι βάση του $T_P S$, βλ. σημείωση 2.3. Με άλλα λόγια, αν $< u', v' > \in T_{(a,b)}D$ είναι διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης $\alpha_1 : I \longrightarrow D$ στο σημείο t_0 με $\alpha_1(t_0) = (a, b)$, τότε με τον παραπάνω ισομορφισμό αυτό πάει στο διάνυσμα ταχύτητας $(\Phi \circ \alpha_1)'(t_0)$ της επιφανειακής καμπύλης $\alpha = \Phi \circ \alpha_1$.

Έστω$(a,b) \in D$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\mathbf{I}_{(a,b)} : T_{(a,b)}D \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$\mathbf{I}_{(a,b)}(u',v') = E(a,b)u'^2 + 2F(a,b)u'v' + G(a,b)v'^2.$$

Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμό πινάκων, η παραπάνω γράφεται και ως

$$\mathbf{I}_{(a,b)}(u',v') = \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(a,b) & F(a,b) \\ F(a,b) & G(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Η $\mathbf{I}_{(a,b)}$ είναι επομένως μια τετραγωνική μορφή και ονομάζεται *πρώτη θεμελιώδης μορφή* της επιφάνειας στο (a,b). Οταν τώρα δίδεται μια επίπεδη καμπύλη $\alpha_1 : I \longrightarrow D$ με $\alpha_1(t) = (u(t), v(t))$ τότε συμβολίζομε με $\mathbf{I}_{\alpha_1}(t)$ την συνάρτηση $\mathbf{I}_{\alpha_1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ που δίδεται από

$$\mathbf{I}_{\alpha_1}(t) = E(u(t),v(t))\ u'(t)^2 + 2F(u(t),v(t))\ u'(t)v'(t) + G(u(t),v(t))\ v'(t)^2.$$

Σημειώνουμε ότι αν $\alpha_1(t) = (u(t), v(t)$ με $\alpha_1(t_0) = (a,b)$ και θέσουμε $u' = u'(t_0)$, $v' = v'(t_0)$, τότε $\mathbf{I}_{\alpha_1}(t_0) = \mathbf{I}_{(a,b)}(u',v')$. Με αυτόν τον συμβολισμό έχουμε ότι

$$||\alpha'(t)||^2 = \mathbf{I}_{\alpha_1}(t). \tag{3}$$

Επομένως

$$L_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathbf{I}_{\alpha_1}(t)}\ dt\ . \tag{4}$$

Συχνά, όταν το (a,b) το έχουμε σταθεροποιήσει, συμβολίζουμε την $\mathbf{I}_{(a,b)}$ πιο απλά με $\mathbf{I}$. Οι ιδιότητες της $\mathbf{I}_{(a,b)}$ και των εμπλεκόμενων συναρτήσεων E, F, G είναι οι εξής:

1. Αν $< u', v' > \neq < 0, 0 >$, τότε $\mathbf{I}_{(a,b)}(u',v') > 0$. Πράγματι, αν $\alpha_1 : I \longrightarrow D$ η καμπύλη με $\alpha_1(t) =< a + tu', b + tv' >$ τότε $\mathbf{I}_{(a,b)}(u',v') = ||(\Phi \circ \alpha_1)'(0)|| > 0$, διότι είναι κανονική καμπύλη. Έπομένως η πρώτη θεμελιώδης μορφή είναι μια θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή.

2. $E(a,b) > 0$, $G(a,b) > 0$, διότι κανένα από τα διανύσματα $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b)$, $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b)$ δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα (είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα).

3. Εχουμε

$$E(a,b)G(a,b) - F(a,b)^2 = ||\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b) \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b)||^2 > 0. \tag{5}$$

   Σημειώνουμε ότι η τελευταία ποσότητα είναι θετική διότι η επιφάνεια είναι κανονική.

Σημείωση 3.5 Από τα παραπάνω έχουμε ότι το μήκος της καμπύλης $\alpha = \Phi \circ \alpha_1$ από το t_1 έως το t_2 δίδεται από

$$L_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathbf{I}_{\alpha_1}(t)}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}\ dt\ ,$$

όπου τα u', v' εκτιμούνται στην θέση t και τα E, F, G στην θέση $(u(t), v(t))$. Σημειώνουμε ότι το μήκος της καμπύλης $\alpha_1(t) = (u(t), v(t))$ από το t_1 έως το t_2 δίδεται από

$$L_{t_1}^{t_2}(\alpha_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{u'^2 + v'^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}\, dt\ .$$

Συνεπώς ο πίνακας $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ καθορίζει το πόσο αλλάζει το μήκος της επίπεδης καμπύλης α_1 κάτω από την απεικόνιση Φ.

Παράδειγμα 3.12 Για τον κύλινδρο, βλ. παράδειγμα 2.2, έχουμε ότι $E(v,z) = R^2$, $F(v,z) = 0$, $G(v,z) = 1$. Συνεπως $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Αν λοιπόν πάρουμε την επιφανειακή καμπύλη $\alpha(t) = \Phi(v(t), z(t))$, έχουμε ότι

$$L_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{R^2 v'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt\ .$$

Σημειώνουμε ότι όταν $R = 1$ τότε η απεικόνιση Φ δεν αλλάζει τα μήκη. Η γεωμετρική ερμηνεία αυτού είναι ότι η απεικόνιση απλά τυλίζει το $\mathbb{R}^2$ πάνω στον κύλινδρο.

Παράδειγμα 3.13 Αν πάρουμε το γράφημα συνάρτησης, βλ. παράδειγματα 2.1 και 2.10, τότε

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \ || < 1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} > ||^2 = 1 + (\frac{\partial f}{\partial u})^2\ , \\ F(u,v) &= \ < 1, 0, \frac{\partial f}{\partial u} >< 0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} > = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\ , \\ G(u,v) &= \ || < 0, 1, \frac{\partial f}{\partial v} > ||^2 = 1 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2\ . \end{aligned}$$

Αν λοιπόν πάρουμε την επιφανειακή καμπύλη $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$, έχουμε ότι

$$L_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2}\, dt\ ,$$

όπου οι μερικές παράγωγοι είναι εκτιμημένες στο σημείο $(u(t), v(t))$.

3.3.2 Γωνία μεταξύ επιφανειακών καμπυλων

Εστω ότι η επιφάνεια S δίδεται από την $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ και έστω $\alpha_1 : I \longrightarrow D$, $\beta_1 : J \longrightarrow D$ δύο επίπεδες καμπύλες με $\alpha_1(t) = (u_1(t), v_1(t))$ και $\beta_1(s) = (u_2(s), v_2(s))$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι $\alpha_1(t_0) = (a,b) = \beta_1(s_0)$. Εστω $P = \Phi(a,b)$ το αντίστοιχο σημείο στην επιφάνεια S. Οι επιφανειακές καμπύλες $\alpha = \Phi \circ \alpha_1$, $\beta = \Phi \circ \beta_1$ τέμνονται στο σημείο P και ορίζουμε ως γωνία των καμπυλών στο P την μικρότερη γωνία θ που σχηματίζουν τα αντίστοιχα διανύσματα ταχύτητας $\alpha'(t_0)$ και $\beta'(s_0)$ στο σημείο P. Εχουμε

$$\cos\theta = \frac{\alpha'(t_0) \cdot \beta'(s_0)}{||\alpha'(t_0)|| \cdot ||\beta'(s_0)||}\ .$$

Από τις σχέση (2) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\alpha'(t_0) &= \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b)\ u_1'(t_0) + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b)\ v_1'(t_0), \\
\beta'(t_0) &= \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b)\ u_2'(s_0) + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b)\ v_2'(s_0).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\alpha'(t_0)\cdot\beta'(s_0) &= \|\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b)\|^2 u_1'u_2' + 2\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(a,b)\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b)(u_1'v_2'+u_2'v_1') + \|\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(a,b)\|^2 v_1'v_2' \\
&= E(a,b)u_1'u_2' + 2F(a,b)(u_1'v_2'+u_2'v_1') + G(a,b)v_1'v_2' \\
&= \begin{pmatrix} u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(a,b) & F(a,b) \\ F(a,b) & G(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

όπου τα u_1', v_1' τα έχουμε εκτιμήσει στο t_0 και τα u_2', v_2' στο s_0. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη σχέση (3), έχουμε επομένως ότι

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{E(a,b)u_1'u_2' + 2F(a,b)(u_1'v_2'+u_2'v_1') + G(a,b)v_1'v_2'}{\sqrt{\mathbf{I}_{\alpha_1}(t_0)}\ \sqrt{\mathbf{I}_{\beta_1}(s_0)}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ v_1' \end{pmatrix}}\ \sqrt{\begin{pmatrix} u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix}}},
\end{aligned}$$

όπου τα E, F, G τα έχουμε εκτιμήσει στο (a,b), τα u_1', v_1' στο t_0 και τα u_2', v_2' στο s_0. Σημειώνουμε ότι αν ϕ είναι η γωνία των επίπεδων καμπύλών α_1, β_1 στο σημείο (a,b), τότε

$$\begin{aligned}
\cos\phi &= \frac{\alpha_1'(t_0)\cdot\beta_1'(s_0)}{\|\alpha_1'(t_0)\|\cdot\|\beta_1'(s_0)\|} \\
&= \frac{u_1'u_2' + 2(u_1'v_2'+u_2'v_1') + v_1'v_2'}{\sqrt{u_1'^2+v_1'^2}\ \sqrt{u_2'^2+v_2'^2}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ v_1' \end{pmatrix}}\ \sqrt{\begin{pmatrix} u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix}}}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς πάλι και εδώ ο πίνακας $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ καθορίζει το πόσο αλλάζει η γωνία των επίπεδων καμπυλών α_1 και β_1 κάτω από την απεικόνιση Φ.

3.3.3 Εμβαδά σε επιφάνειες

Εστω πάλι S η επιφάνεια που δίδεται από την $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Σε αυτήν την παράγραφο υποθέτουμε ότι η Φ είναι μια 1-1 απεικόνιση. Σημειώνουμε ότι στα περισσότερα παραδείγματα που συναντάμε η Φ γίνεται 1-1 απεικόνιση όταν περιορίσουμε κατάλληλα το πεδίο ορισμού. Εχουμε ότι

$$\text{εμβαδόν}(D) = \int\int_D 1\, dudv \ .$$

Ο σκοπός μας είναι να βρούμε το εβαδόν της $\Phi(D)$. Θα το κάνουμε, όχι αυστηρά, εφαρμόζοντας τις συνήθεις προσεγγιστικές εκτιμήσεις. Αν Π ένα μικρό παραλληλεπίπεδο στο D, θα βρούμε πρώτα μια προσέγγιση του εμβαδού $\Phi(\Pi)$. Εστω $(a,b)\in D$ και λ,μ μικροί θετικοί αριθμοί. Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με κορυφές τα $(a,b),(a+\lambda,b),(a,b+\mu),(a+\lambda,b+\mu)$. Εχουμε

$$\text{εμβαδόν}(\Pi) = \lambda\mu \ .$$

Η πλευρά π_1 που ενώνει τις κορυφές (a,b) και $(a+\lambda,b)$ αντιστοιχεί στο ίχνος της επίπεδης καμπύλης $\alpha_1 : (0,\lambda) \longrightarrow D$ με $\alpha_1(t) = (a+t,b)$. Συνεπώς το μήκος του τμήματος $\Phi(\pi_1)$ ισούται με

$$s_1 = \int_0^\lambda \sqrt{\mathbf{I}_{\alpha_1}}\ dt = \int_0^\lambda ||\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u}(a+t,b)||\ dt.$$

Επειδή το λ είναι μικρό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\forall t \in (a,\lambda)$ έχουμε ότι $||\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u}(a+t,b)|| \cong ||\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u}(a,b)||$. Επομένως, προσεγγιστικά το μήκος $s_1 \cong \int_0^\lambda ||\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u}(a,b)||\ \ dt = \lambda||\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u}(a,b)||$. Με βάση αυτό, μπορούμε να προσεγγίσουμε την πλευρά $\Phi(\pi_1)$ με το διάνυσμα $\lambda\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u}(a,b)$. Αν π_2 είναι το ευθύγραμμο τμήμα με κορυφές τα (a,b) και $(a,b+\mu)$ τότε, ομοίως, μπορούμε να προσεγγίσουμε την πλευρά $\Phi(\pi_2)$ με το διάνυσμα $\mu\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial v}(a,b)$. Συνεπώς, το τετράπλευρο $\Phi(\Pi)$ μπορεί να προσεγγισθεί από το παραλληλόγραμμο με πλευρές τα διανύσματα $\lambda\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u}(a,b)$ και $\mu\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial v}(a,b)$. Το εμβαδόν του τελευταίου ισούται με $\lambda\mu||\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u}(a,b)\times\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial v}(a,b)|| =$ εμβαδόν(Π) $\sqrt{E(a,b)G(a,b)-F(a,b)^2}$, βλ. σχέση (5). Αρα

$$\text{εμβαδόν}(\Phi(\Pi)) \cong \text{ εμβαδόν}(\Pi)\ \sqrt{E(a,b)G(a,b)-F(a,b)^2}\ \ .$$

Διαμερίζοντας τώρα το D σε μικρά παραλληλόγραμμα όπως το παραπάνω και παίρνοντας όρια συμπεραίνουμε ότι

$$\text{εμβαδόν}(\Phi(D)) = \int\int_D \sqrt{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}\ \ dudv\ .$$

Παράδειγμα 3.14 Αν $\Phi(u,v) = (u,v,f(u,v))$ το γράφημα συνάρτησης $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ τότε από τον υπολογισμό του παραδείγματος 3.13 έχουμε ότι

$$\text{εμβαδόν γραφήματος} = \int\int_D \sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v))^2+(\frac{\partial f}{\partial v}(u,v))^2}\ \ dudv\ .$$

Παράδειγμα 3.15 Για να βρούμε το εμβαδόν του κυλίνδρου ακτίνας R και ύψους h τον περιγράφουμε σε παραμετρική μορφή από την απεικόνιση $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(v,z) = (R\cos v, R\sin v, z)$, βλ. παράδειγμα 2.2, όπου όμως τώρα $D = [0,2\pi)\times[0,h]$. Η απεικόνιση αυτή είναι 1-1 (βέβαια το πεδίο ορισμού δεν είναι ανοικτό, όπως συνήθως, αλλά αυτό δεν επηρεάζει τους υπολογισμούς μας). Από το παράδειγμα 3.12 έχουμε ότι $\sqrt{EG-F^2} = R$ και επομένως

$$\text{εμβαδόν}(\Phi(D)) = R\cdot\text{εμβαδόν}(D) = R\,2\pi h = 2\pi Rh\ .$$

4.4 Καμπυλότητα σε επιφάνειες

4.4.1 Η κάθετη καμπυλότητα

Θα μελετήσουμε την καμπυλότητα των επιφανειών δια μέσου της καμπυλότητας των επιφανειακών καμπυλών. Αρχίζουμε με έναν ορισμό.

Ορισμός 4.3 *Αν $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη του χώρου, τότε ονομάζουμε διάνυσμα καμπυλότητας το διάνυσμα $\kappa_\alpha(t) \ \vec{\eta}_\alpha\ (t)$, όπου κ_α η καμπυλότητα και $\vec{\eta}_\alpha$ το κύριο κάθετο διάνυσμα.*

Υπενθυμίζουμε οτι η καμπυλότητα και το κύριο κάθετο διάνυσμα της α ορίζονται δια μέσου των αντιστοίχων διανυσμάτων μιας (θετικής) αναπαραμέτρισής της ως προς μήκος τόξου. Αν $\beta(s) = \alpha(t(s))$ είναι μια τέτοια, τότε $\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(s(t))$ και $\vec{\eta}_\alpha\ (t) = \vec{\eta}_\beta\ (s(t))$, όπου $s = s(t)$ είναι η αντίστροφη απεικόνιση της $t = t(s)$. Σημειώνουμε ότι όταν $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη του χώρου παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου τότε $\beta''(s) = \kappa_\beta(s)\ \vec{\eta}_\beta\ (s)$, δηλ. το διάνυσμα καμπυλότητας είναι το $\beta''(s)$.

Εστω τώρα $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$ μια επιφανειακή καμπύλη στην επιφάνεια S που ορίζεται από την $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Εστω $\vec{N}\ (t)$ το κάθετο διάνυσμα της S στο σημείο $\alpha(t)$. Η προβολή του διανύσματος καμπυλότητας της καμπύλης α στο σημείο $\alpha(t)$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{N}\ (t)$ έχει την μορφή $\kappa_\alpha^{\mathrm{normal}}(t)\ \vec{N}\ (t)$. Η $\kappa_\alpha^{\mathrm{normal}}(t)$ λέγεται κάθετη καμπυλότητα της καμπύλης α. Αν $\theta(t)$, $0 \le \theta(t) \le \pi$, είναι η μικρότερη γωνία των διανυσμάτων καμπυλότητας της καμπύλης και του κάθετου διανύσματος $\vec{N}\ (t)$ της επιφάνειας, τότε έχουμε

$$\kappa_\alpha^{\mathrm{normal}}(t) = \kappa_\alpha(t)\ \cos\theta(t)\,. \tag{6}$$

Σημειώνουμε ότι $\cos\theta(t) = \vec{\eta}_\alpha\ (t) \cdot \vec{N}\ (t)$ και συνεπώς έχουμε οτι

$$\kappa_\alpha^{\mathrm{normal}}(t) = \kappa_\alpha(t)\ \ \vec{\eta}_\alpha\ (t) \cdot \vec{N}\ (t)\,.$$

Παρατηρούμε ότι όταν έχουμε μια επιφανειακή καμπύλη, έστω $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\beta(s) = \Phi(u(s), v(s))$, παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου, τότε αφού $\beta''(s) = \kappa_\beta(s)\ \vec{\eta}_\beta\ (s)$, θα έχουμε ότι

$$\kappa_\beta^{\mathrm{normal}}(s) = \beta''(s) \cdot \vec{N}\ (s)\,.$$

Αν λοιπόν $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$ μια επιφανειακή καμπύλη και πάρουμε μια (θετική) αναπαραμέτρησή της $\beta(s) = \alpha(t(s))$ ως προς μήκος τόξου έχουμε ότι

$$\kappa_\alpha^{\mathrm{normal}}(t) = \kappa_\alpha(t)\ \ \vec{\eta}_\alpha\ (t) \cdot \vec{N}\ (t) = \kappa_\beta(s)\ \ \vec{\eta}_\beta\ (s) \cdot \vec{N}\ (t) = \beta''(s) \cdot \vec{N}\ (t)\,,$$

όπου $s = s(t)$ είναι η αντίστροφη της $t = t(s)$. Εχουμε τώρα

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \alpha'(t)t'(s)\,, \\ \beta''(s) &= \alpha''(t)t'(s)^2 + \alpha'(t)t''(s)\,. \end{aligned}$$

Αρα

$$\beta''(s)\cdot \overrightarrow{N}(t) = t'(s)^2 \ \ \alpha''(t)\cdot \overrightarrow{N}(t) .$$

Ομως $t'(s) = \frac{1}{||\alpha'(t)||}$, και επομένως

$$\kappa_\alpha^{\text{normal}}(t) = \frac{\alpha''(t)\cdot \overrightarrow{N}(t)}{||\alpha'(t)||^2} . \tag{7}$$

Για να υπολογίσουμε τον αριθμητή έχουμε

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u}u' + \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial v}v' \\
\alpha'' &= (\frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial u^2}u' + \frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial v \partial u}v')u' + \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u}u'' + (\frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial u \partial v}u' + \frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial v^2}v')v' + \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial v}v'' \\
&= (\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u}u'' + \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial v}v'') + (\frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial u^2}u'^2 + 2\frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial u \partial v}u'v' + \frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial v^2}v'^2) .
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\alpha''\cdot \overrightarrow{N} = (\frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial u^2}\cdot \overrightarrow{N})u'^2 + 2(\frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial u \partial v}\cdot \overrightarrow{N})u'v' + (\frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial v^2}\cdot \overrightarrow{N})v'^2.$$

Για να συστηματοποιήσουμε το παραπάνω, ορίζουμε τις συνάρτησεις $L, M, N : D \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned}
L(u,v) &= \frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial u^2}(u,v)\cdot \overrightarrow{N}(u,v) = \frac{\frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial u^2}\cdot (\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial v})}{\sqrt{EG - F^2}} , \\
M(u,v) &= \frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial u \partial v}(u,v)\cdot \overrightarrow{N}(u,v) = \frac{\frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial u \partial v}\cdot (\partial\frac{\overrightarrow{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial v})}{\sqrt{EG - F^2}} , \\
N(u,v) &= \frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial v^2}(u,v)\cdot \overrightarrow{N}(u,v) = \frac{\frac{\partial^2 \overrightarrow{X}}{\partial v^2}\cdot (\frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial v})}{\sqrt{EG - F^2}} .
\end{aligned}$$

Εστω τώρα $(a,b) \in D$. Τότε ορίζουμε την συνάρτηση $\mathbf{II}_{(a,b)} : T_{(a,b)}D \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned}
\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v') &= L(a,b)u'^2 + 2M(a,b)u'v' + N(a,b)v'^2 \\
&= \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(a,b) & M(a,b) \\ M(a,b) & N(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Οπως και στην περίπτωση της πρώτης θελελιώδους μορφής, η $\mathbf{II}_{(a,b)}$ είναι μια τετραγωνική μορφή η οποία ονομάζεται *δεύτερη θεμελειώδης μορφή* της επιφάνειας στο (a,b). Οταν τώρα δίδεται μια επίπεδη καμπύλη $\alpha_1 : I \longrightarrow D$ με $\alpha_1(t) = (u(t), v(t))$, τότε συμβολίζομε με $\mathbf{II}_{\alpha_1}(t)$ την συνάρτηση $\mathbf{II}_{\alpha_1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ που δίδεται από

$$\mathbf{II}_{\alpha_1}(t) = L(u(t), v(t))\ u'(t)^2 + 2M(u(t), v(t))\ u'(t)v'(t) + N(u(t), v(t))\ v'(t)^2.$$

Για να επιστρέψουμε τώρα στο αρχικό πρόβλημα, έχουμε ότι για την καμπύλη $\alpha = \Phi \circ \alpha_1$ ο τύπος (7) γράφεται ως

$$\kappa_\alpha^{\text{normal}}(t) = \frac{\mathbf{II}_{\alpha_1}(t)}{\mathbf{I}_{\alpha_1}(t)} .$$

Για συγκεκριμμένο $t = t_0$, αν $\alpha_1(t_0) = (a, b)$ και $u' = u'(t_0)$, $v' = v'(t_0)$ έχουμε ότι

$$\kappa_\alpha^{\text{normal}}(t_0) = \frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v')}{\mathbf{I}_{(a,b)}(u', v')} \ . \tag{8}$$

Σημείωση 4.6 1. Από τον παραπάνω τύπο συμπεραίνουμε ότι η κάθετη καμπυλότητα της επιφανειακής καμπύλης α εξαρτάται μόνον από το διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης α_1 και τις συναρτήσεις L, M, N που σχετίζονται με την επιφάνεια. Σημειώνουμε ότι το διάνυσμα ταχύτητας της α_1 καθορίζει το διάνυσμα ταχύτητας της α: αν $\alpha_1'(t_0) =< u', v' >$ τότε $\alpha'(t_0) = \frac{\vec{X}}{\partial u}(a, b)u' + \frac{\vec{X}}{\partial v}(a, b)v'$, βλ. σημειωση 3.4. Επομένως η κάθετη καμπυλότητα εξαρτάται μόνον από το διάνυσμα ταχύτητας της επιφανειακής καμπύλης. Στην παραγματικότητα εξαρτάται μόνον από την διεύθυνση του διανύσματος ταχύτητας. Πράγματι αν $< u_1', v_1' >= \lambda < u', v' >$, $\lambda \neq 0$ τότε $\mathbf{II}_{(a,b)}(u_1', v_1') = \lambda^2 \mathbf{II}_{(a,b)}(u', v_1')$ και $\mathbf{I}_{(a,b)}(u_1', v_1') = \lambda^2 \mathbf{I}_{(a,b)}(u', v')$ και επομένως $\frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u_1', v_1')}{\mathbf{I}_{(a,b)}(u_1', v_1')} = \frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v')}{\mathbf{I}_{(a,b)}(u', v')}$. Συνεπώς επιφανειακές καμπύλες με παράλληλα διανύσματα ταχύτητας σε κάποιο σημείο της επιφάνειας έχουν την ίδια κάθετη καμπυλότητα.

2. Σε αντίθεση με την πρώτη θεμελιώδη μορφή που είναι θετικά ορισμένη, η δεύτερη θεμελιώδης μορφή ενδέχεται να αλλάζει πρόσημο καθως το $< u', v' >$ μεταβάλλεται στο $T_{(a,b)}D$. Οταν $\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v') > 0$ τότε, αφού $\kappa_\alpha^{\text{normal}} = k_\alpha \cos\theta$, $\kappa_\alpha > 0$, αυτό συνεπάγεται ότι η γωνία θ είναι οξεία. Οταν $\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v') < 0$ τότε η γωνία θ είναι αμβλεία.

Ορμώμενοι από την παραπάνω σημείωση δίδουμε τον εξής ορισμό

Ορισμός 4.4 *Εστω S επιφάνεια που δίδεται από την $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ και $P = \Phi(a, b)$ σημείο της. Ορίζουμε ως κάθετη καμπυλότητα της S στο P στην κατεύθυνση του διανύσματος $< u', v' >$ από τον τύπο*

$$K_{S,P}^{\text{normal}}(u', v') = \frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v')}{\mathbf{I}_{(a,b)}(u', v')}$$

Σημείωση 4.7 Οπως έχουμε δει στην σημείωση 3.4 υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των διανυσμάτων $< u', v' >$ και των εφαπτόμενων διανυσμάτων της επιφάνειας στο σημείο P. Αν $\vec{w} \in T_P S$, τότε χρησιμοποιούμε την έκφραση 'κάθετη καμπυλότητα της S στο P στην διεύθυνση του διανύσματος $\vec{w}$ '.

Ειδαμε λοιπόν από τα παραπάνω ότι η κάθετη καμπυλότητα της S στο P στην διεύθυνση του διανύσματος $\vec{w}$ παριστά την κάθετη καμυλότητα μιας οποιασδήποτε επιφανειακής καμπύλης που περναει από το P και έχει διάνυσμα ταχύτητας παράλληλο προς το $\vec{w}$. Για κάθε επιλογή ενός μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος $\vec{w}$ κατασκευάζουμε μια φυσιολογική καμπύλη που περνάει από το P και έχει διάνυσμα ταχύτητας το $\vec{w}$.

Αρχίζουμε με μια παρατήρηση. Εστω, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη του χώρου με $\alpha(I) \subseteq \Pi$, οπου Π κάποιο επίπεδο. Τότε και τα δανύσματα $\alpha'(t)$, $\alpha''(t)$, αν εφαρμοστούν στο σημείο $\alpha(t)$, είναι διανύσματα του επιπέδου Π. Πράγματι, αν $\vec{w}$ το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου, $\vec{x}\,(t)$ το διάνυσμα θέσης της α και $t_0 \in I$ έχουμε: $(\vec{x}\,(t) - \vec{x}\,(t_0)) \cdot \vec{w} = 0$ και άρα $\alpha'(t) \cdot \vec{w} = 0$, $\alpha''(t) \cdot \vec{w} = 0$ που συνεπάγεται αυτό που θέλουμε.

Εστω τώρα S μια επιφάνεια $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ και $P = \Phi(a,b)$ ένα σημείο της. Εστω $\vec{w}\in T_PS$ εφαπτόμενο διάνυσμα με μοναδιαίο μηκος και ας συμβολίσουμε με Π το επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{w}$ και $\vec{N}$. Η τομή του Π με την S είναι (κοντα στο P) μια επιφανειακή καμπύλη $\beta(s) = \Phi(u(s), v(s))$, την οποία παραμετρίζουμε ως προς μήκος τόξου. Εστω $P = \beta(s_0)$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι το $\beta'(s_0) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}u' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}v'$ είναι διάνυσμα του επιπέδου Π και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{N}$. Συνεπώς $\beta'(s_0) \parallel \vec{w}$. Κάνοντας, ενδεχομένως μια αναπαραμέτρηση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\beta'(s_0) = \vec{w}$ (και τα δύο είναι με μοναδιαίο μήκος). Αυτές οι καμπύλες ονομάζονται *κάθετες τομές*. Το $\beta''(s_0)$ είναι και αυτό διάνυσμα του Π και, επίσης, $\beta'(s_0) \perp \beta''(s_0)$, συνεπώς $\beta''(s_0) \parallel \vec{N}$. Επομένως, αν $\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v') > 0$ τότε η γωνία θ είναι οξεία και άρα $\theta = 0$ οπότε $\vec{\eta}_\beta\ (s_0) = \vec{N}$, βλ. σημείωση 4.6. Επίσης, από τον τύπο (6) έχουμε ότι $\kappa_\beta(s_0) = \frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')}{\mathbf{I}_{(a,b)}(u',v')}$. Ομοίως αν $\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v') < 0$ τότε η γωνία θ είναι αμβλεία και άρα $\theta = \pi$ οπότε $\vec{\eta}_\beta\ (s_0) = -\vec{N}$, και από τον τύπο (6) έχουμε ότι $\kappa_\beta(s_0) = -\frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')}{\mathbf{I}_{(a,b)}(u',v')}$. Επομένως η καμπύλη που προκύπτει ως τομή του παραπάνω επιπέδου με την επιφάνεια έχει στο σημείο P καμπυλότητα ίση με $\kappa_\beta(s_0) = |\frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')}{\mathbf{I}_{(a,b)}(u',v')}| = |K^{\text{normal}}_{S,P}(u', v')|$.

Σημειώνουμε ότι το επίπεδο Π που καθορίζεται από τα διανύσματα $\vec{w}$ και $\vec{N}$ είναι ένα προσανατολισμέμο επίπεδο. Η 'έξω ' του πλευρά είναι αυτή προς την οποία δεικνύει το διάνυσμα $\vec{w} \times \vec{N}$. Η $\beta(s)$ τώρα ως *επίπεδη καμπύλη* έχει κάθετο διάνυσμα το $\vec{N}$ (Το $\vec{N}$ προκύπτει από το $\vec{w}$ με στροφή 90 μοιρών σε διεύθυνση αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού). Συμβολίζουμε με $\kappa^{\text{plane}}_\beta$ την καμπυλότητα της β ως επίπεδης καμπύλης. Από τα παραπάνω έχουμε ότι όταν $\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v') > 0$ τότε το $\beta''(s_0)$ έχει την φορά του $\vec{N}$, άρα $\kappa^{\text{plane}}_\beta(s_0) = \kappa_\beta(s_0) = \frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')}{\mathbf{I}_{(a,b)}(u',v')} > 0$. Οταν $\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v') < 0$ τότε το $\beta''(s_0)$ έχει φορά αντίθετη του $\vec{N}$, άρα $\kappa^{\text{plane}}_\beta(s_0) = -\kappa_\beta(s_0) = -(-\frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')}{\mathbf{I}_{(a,b)}(u',v')}) = \frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')}{\mathbf{I}_{(a,b)}(u',v')} < 0$. Επομένως, ως *επίπεδη καμπύλη* η β έχει καμπυλότητα πάντα ίση με $\kappa^{\text{plane}}_\beta(s_0) = \frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')}{\mathbf{I}_{(a,b)}(u',v')} = K^{\text{normal}}_{S,P}(u', v')$.

Παράδειγμα 4.16 Εστω S το γράφημα της συνάρτησης $z = u^2 + v^2$. Τότε η παραμέτρηση της S δίδεται από την $\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Θα μελετήσουμε την S στο σημείο $P = (0, 0, 0) = \Phi(0, 0)$. Εχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{X}}{\partial u} &= \ < 1, 0, 2u > . \text{ Αρα } \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(0,0) =< 1, 0, 0 > \text{ και } E(0, 0) = 1.\\
\frac{\partial \vec{X}}{\partial v} &= \ < 0, 1, 2v > . \text{ Αρα } \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(0,0) =< 0, 1, 0 > \text{ και } G(0, 0) = 1,\ F(0, 0) = 0.\\
\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u^2} &= \ < 0, 0, 2 >,\ \ \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial v^2} =< 0, 0, 2 >,\ \ \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u \partial v} =< 0, 0, 0 > .
\end{aligned}
$$

Αρα

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_{(0,0)}(u',v') &= u'^2+v'^2.\\
\vec{N}\,(0,0) &= <0,0,1>.\\
L(0,0) &= 2,\;\; M(0,0)=0,\;\; N(0,0)=2\\
\mathbf{II}_{(0,0)}(u',v') &= 2u'^2+2v'^2.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς η κάθετη καμπυλότητα της S στο $P=(0,0,0)$ στην διεύθυνση του διανύσματος $<u',v'>$ είναι πάντα ίση με 2. Ας επιβεβαιώσουμε τώρα ότι αυτή είναι επίσης η καμπυλότητα των παραπάνω επιπεδων καμπυλών που προκύπτουν ως τομή της επιφάνειας με το επίπεδο που ορίζεται από ένα μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{w}$ στο P και το κάθετο διάνυσμα $<0,0,1>$. Το $\vec{w}$ μπορεί να γραφεί ως $\vec{w}=<\cos\theta,\sin\theta,0>$. Το επίπεδο Π είναι το κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει το διάνυσμα $\vec{w}$. Μια παραμέτρηση της καμπύλης τομής είναι η $\alpha(t)=<t\cos\theta,t\sin\theta,t^2>$. Αυτή δεν είναι παραμέτρηση ως προς μ.τ., όμως $\alpha'(t)=<\cos\theta,\sin\theta,2t>$ και άρα $\alpha'(0)=<\cos\theta,\sin\theta,0>=\vec{w}$. Συνεπώς αν β μια θετική αναπαραμέτρηση ως προς μ.τ. θα έχει $\beta'(0)=\vec{w}$. Τωρα η καμπυλότητα της β, ως επίπεδης καμπύλης, είναι ίση με αυτήν της α. Για να υπολογίσουμε την τελευταία θα πρέπει πρώτα να γράψουμε την καμπύλη ως καμπύλη του επιπέδου Π με ορθοκανονική βάση που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{e_1}=\vec{w},\;\vec{e}_2=\vec{N}$. Εχουμε για το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης της α ότι $\vec{x}\,(t)=t\,\vec{e_1}+t^2\,\vec{e_2}$ επομένως σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων έχουμε ότι $\alpha(t)=(t,t^2)$. Η καμπυλότητα αυτής της καμπύλης, ως επίπεδης καμπύλης, στο σημείο $(0,0)$ είναι $\frac{1\cdot 2-0\cdot 0}{1}=2$.

Παράδειγμα 4.17 Εστω S το γράφημα της συνάρτησης $z=uv$. Τότε η παραμέτρηση της S δίδεται από την $\Phi(u,v)=(u,v,uv)$. Θα μελετήσουμε την S στο σημείο $P=(0,0,0)=\Phi(0,0)$. Εχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{X}}{\partial u} &= <1,0,v>.\ \text{Αρα}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial u}(0,0)=<1,0,0>\ \text{και}\ E(0,0)=1.\\
\frac{\partial\vec{X}}{\partial v} &= <0,1,u>.\ \text{Αρα}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial v}(0,0)=<0,1,0>\ \text{και}\ G(0,0)=1,\ F(0,0)=0.\\
\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial u^2} &= <0,0,0>,\ \ \frac{\partial^2\vec{X}}{\partial v^2}=<0,0,0>,\ \ \frac{\partial^2\vec{X}}{\partial u\partial v}=<0,0,2>.
\end{aligned}
$$

Αρα

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_{(0,0)}(u',v') &= u'^2+v'^2.\\
\vec{N}\,(0,0) &= <0,0,1>.\\
L(0,0) &= 0,\;\; M(0,0)=2,\;\; N(0,0)=0\\
\mathbf{II}_{(0,0)}(u',v') &= 4u'v'.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς κάθετη καμπυλότητα της S στο $P=(0,0,0)$ στην διεύθυνση του διανύσματος $<u',v'>$ είναι ίση με $\frac{2u'v'}{u'^2+v'^2}$. Γράφουμε $\vec{w}=<\cos\theta,\sin\theta,0>$. Το επίπεδο Π είναι το κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει το διάνυσμα $\vec{w}$. Μια παραμέτρηση της κάθετης τομής είναι η $\alpha(t) =< t\cos\theta, t\sin\theta, \frac{t^2\sin 2\theta}{2} >$. Αυτή δεν είναι παραμέτρηση ως προς μ.τ., όμως $\alpha'(t) =< \cos\theta, \sin\theta, t\sin 2\theta >$ και άρα $\alpha'(0) =< \cos\theta, \sin\theta, 0 >= \vec{w}$. Συνεπώς αν β μια θετική αναπαραμέτρηση ως προς μ.τ. θα έχει $\beta'(0) = \vec{w}$. Τωρα η καμπυλότητα της β, ως επίπεδης καμπύλης, είναι ίση με αυτήν της α. Για να υπολογίσουμε την τελευταία θα πρέπει πρώτα να γράψουμε την καμπύλη ως καμπύλη του επιπέδου Π με ορθοκανονική βάση που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{e_1} = \vec{w}$, $\vec{e}_2 = \vec{N}$. Εχουμε για το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης της α ότι $\vec{x}\ (t) = t\ \vec{e_1} + \frac{t^2\sin 2\theta}{2}\ \vec{e_2}$ επομένως σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων έχουμε ότι $\alpha(t) = (t, \frac{t^2\sin 2\theta}{2})$. Η καμπυλότητα αυτής της καμπύλης στο σημείο $(0,0)$, ως επίπεδης καμπύλης, είναι $\sin 2\theta$ που είναι ίση με την κάθετη καμπυλότητα $(u' = \cos\theta,\ v' = \sin\theta)$.

Παράδειγμα 4.18 Εστω S ο κύλινδρος $\Phi(v,z) = (R\cos v, R\sin v, z)$. Θα μελετήσουμε την S στο σημείο $P = (0, R, 0) = \Phi(\frac{\pi}{2}, 0)$. Εχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{X}}{\partial v} &= < -R\sin v, R\cos v, 0 > . \text{ Αρα } \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(\frac{\pi}{2}, 0) =< -R, 0, 0 > \text{ και } E(\frac{\pi}{2}, 0) = R^2. \\
\frac{\partial \vec{X}}{\partial z} &= < 0, 0, 1 > . \text{ Αρα } \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(\frac{\pi}{2}, 0) =< 0, 0, 1 > \text{ και } G(\frac{\pi}{2}, 0) = 1,\ F(\frac{\pi}{2}, 0) = 0. \\
\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial v^2} &= < -R\cos v, -R\sin v, 0 > . \text{ Αρα } \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial v^2}(\frac{\pi}{2}, 0) =< 0, -R, 0 > . \\
\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial z^2} &= < 0, 0, 0 > . \text{ Αρα } \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial z^2}(\frac{\pi}{2}, 0) =< 0, 0, 0 > . \\
\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial v \partial z} &= < 0, 0, 0 > . \text{ Αρα } \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial v \partial z}(\frac{\pi}{2}, 0) =< 0, 0, 0 > .
\end{aligned}
$$

Αρα

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_{(\frac{\pi}{2}, 0)}(v', z') &= R^2 v'^2 + z'^2. \\
\vec{N}\ (\frac{\pi}{2}, 0) &= < 0, 1, 0 > . \\
L(\frac{\pi}{2}, 0) &= -R,\ M(\frac{\pi}{2}, 0) = 0,\ \ N(\frac{\pi}{2}, 0) = 0 \\
\mathbf{II}_{(\frac{\pi}{2}, 0)}(v', z') &= -Rv'^2.
\end{aligned}
$$

Βλεπουμε εδώ ότι η κάθετη καμπυλότητα στο σημείο $(0,1,0)$ στην διεύθυνση $< v', z' >=< 0, 1 >$ είναι μηδεν και αντιστοιχεί στην καμπυλότητα της κάθετης τομής που σε αυτήν την περίπτωση είναι μια ευθεία.

Γενικότερα τώρα, αν πάρουμε ως επίπεδο Π το επίπεδο που περιέχει το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{w} \in T_P S$ και σχηματίζει γωνία $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ με το κάθετο διάνυσμα $\vec{N}$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$, τότε η αντίστοιχη επιφανειακή καμπύλη β, όπως παραπάνω, που είναι η τομή του επιπέδου με την επιφάνεια, θα έχει $\beta'(s_0)\ \| \vec{w}$ (υποθέτουμε πάλι ότι η β είναι παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου και $P = \beta(s_0)$). Επίσης, το διάνυσμα $\beta''(s_0)$

σχηματίζει γωνία $\theta = \phi$ με το $\vec{N}$, αν $\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v') > 0$ και γωνία $\theta = \pi - \phi$, αν $\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v') < 0$. Επομένως, από τον τύπο (6), στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε ότι $\kappa_\beta(s_0) = \frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')}{\cos\phi\, \mathbf{I}_{(a,b)}(u',v')}$ και στην δεύτερη $\kappa_\beta(s_0) = -\frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')}{\cos\phi\, \mathbf{I}_{(a,b)}(u',v')}$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση θα ισχύει ότι $\kappa_\beta(s_0) = |\frac{\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')}{\cos\phi\ \mathbf{I}_{(a,b)}(u',v')}|$.

Παράδειγμα 4.19 Στο παράδειγμα 2.11 είδαμε ότι το κάθετο διάνυσμα της σφαίρας έχει την διεύθυνση της ακτίνας με φορα προς το κεντρο. Σε ένα σημείο της σφαίρας, π.χ. στο $P = (0,1,0) = \Phi(0,\pi/2)$, παίρνουμε τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο που σχηματίζει γωνία ϕ με την ακτίνα. Ας υπολογίσουμε την κάθετη καμπυλότητα της σφαίρας σε αυτό το σημείο.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{X}}{\partial u} &= < -R\sin u\cos v, -R\sin u \sin v, R\cos u > . \text{ Αρα} \\
\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(0,\pi/2) &= < 0,0,R > \text{ και } E(0,\pi/2) = R^2. \\
\frac{\partial \vec{X}}{\partial v} &= < -R\cos u\sin v, R\cos u\cos v, , 0 > . \text{ Αρα} \\
\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(0,0) &= < -R,0,0 > \text{ και } G(0,\pi/2) = R^2,\ F(0,\pi/2) = 0. \\
\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u^2}(0,\pi/2) &= < 0,-R,0 > \quad \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial v^2} =< 0,-R,0 >, \quad \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u \partial v} =< 0,0,0 > .
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{(0,\pi/2)}(u',v') &= R^2(u'^2 + v'^2). \\
\vec{N}\,(0,0) &= < 0,-1,0 > . \\
L(0,0) &= R,\ M(0,0) = 0,\ N(0,0) = R. \\
\mathbf{II}_{(0,0)}(u',v') &= R(u'^2 + v'^2).
\end{aligned}$$

Επομένως η κάθετη καμπυλότητα της σφαίρας στο P είναι $1/R$. Τότε από το παραπάνω θα έχουμε ότι η παραπάνω επίπεδη τομή της σφαίρας θα έχει καμπυλότητα $\frac{1}{R\cos\phi}$. Αυτό βέβαια μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε και απ' ευθείας διότι η κάθετη τομή είναι κύκλος ακτίνας $R\cos\phi$.

4.4.2 Τοπική εικόνα μιας επιφάνειας

Εστω S μια επιφάνεια που ορίζεται από την απεικόνιση $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ και $P = \Phi(a,b)$ ένα σημείο της. Θα δούμε τώρα ότι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή καθορίζει, εν γένει, την τοπική εικόνα της S στο σημείο P. Εχουμε ότι

$$\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v') = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2, \text{ όπου } L = L(a,b),\ M = M(a,b),\ N = N(a,b).$$

Ας μελετήσουμε το πρόσημο της $\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')$ καθώς το (u',v') μεταβάλεται. Υπενθυμίζουμε ότι $\mathbf{II}_{(a,b)}(\lambda u',\lambda v') = \lambda^2 \mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')$ και άρα το πρόσημο παραμένει σταθερό κατά μήκος των ευθειών που περνάνε από την αρχή των αξόνων. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ρίζες της $\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')$ βρίσκονται κατά μήκος τέτοιων ευθειών, δηλ. αν

$\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v') = 0$ για κάποιο $(u',v') \neq (0,0)$ τότε και $\mathbf{II}_{(a,b)}(\lambda u', \lambda v') = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Μια ευθεία όπως παραπάνω όπου η $\mathbf{II}_{(a,b)}$ μηδενίζεται θα την λέμε ευθεία μηδενισμού της $\mathbf{II}_{(a,b)}$. Σημειώνουμε ότι $\mathbf{II}_{(a,b)}(0,0) = 0$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $L \neq 0$. Τότε ο u'-άξονας δεν είναι ευθεία μηδενισμού. Γράφουμε την δεύτερη θεμελιώδη μορφή ως $\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v') = v'^2(L\lambda^2 + 2M\lambda + N)$, όπου $\lambda = \frac{u'}{v'}$. Επομένως το λ παριστά την κλίση των ευθειών που περνάνε από την αρχή των αξόνων. Καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$ παίρνουμε τις κλίσεις όλων των ευθειών, εκτός από αυτήν της $v' = 0$ που από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι δεν είναι ευθεία μηδενισμού. Επίσης, το πρόσημο του πολυωνύμου $p(\lambda) = L\lambda^2 + 2M\lambda + N$ είναι το ίδιο με αυτό της $\mathbf{II}_{(a,b)}$.

Εστω τώρα ότι $\Delta = M^2 - LN < 0$. Τότε το $p(\lambda)$ δεν μηδενίζεται και άρα έχει σταθερό πρόσημο. Επομένως σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε ότι π.χ. $\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v') > 0, \forall (u',v') \neq (0,0)$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε τις κάθετες τομές, τότε η επίπεδη καμπυλότητα αυτών μένει πάντα θετική και συνεπώς οι καμπύλες βρίσκονται όλες από την από την πλευρά της εφαπτόμενης ευθείας που βρίσκεται το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{N}$. Καθώς περιστρέφουμε το επίπεδο που βρίσκονται οι κάθετες τομές από το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{N}$ ωστε να συμπληρώσουμε μια πλήρη περιστροφή, τότε η ένωση των αντίστοιχων κάθετων τομών είναι τοπικά γύρω από το σημείο P η επιφάνεια S. Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση, η επιφάνεια θα βρίσκεται από την μιά πλευρά του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο P, αυτήν στην οποία δεικνύει το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{N}$, βλ. το παράδειγμα 4.16. Ομοίως, αν $\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v') < 0, \forall (u',v') \neq (0,0)$ η επιφάνεια θα βρίσκεται προς την μια μεριά του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο P, αντίθετην αυτής στην οποία δεικνύει το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{N}$. Σημεία P όπως το παραπάνω λέγονται *ελλειπτικά σημεία*.

Εστω ότι $\Delta = M^2 - LN > 0$. Τότε η $p(\lambda) = 0$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες λ_1, λ_2. Ανάμεσα σε αυτές το πρόσημο της $p(\lambda)$ εναλλάσσεται. Συνεπώς η $\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')$ έχει δύο ευθείες μηδενισμού, τίς $y = \lambda_1 x$, $y = \lambda_2 x$. Αυτές χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα κομμάτια όπου τό πρόσημο της $\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')$ εναλλάσσεται. Επομένως, από όσα είπαμε παραπάνω, στα δύο από αυτά η επιφάνεια είναι από την μεριά του του εφαπτόμενου επιπέδου της S στο P στην οποία δεικνύει το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{N}$ και στα άλλα δύο από την αντίθετη μεριά, βλ. παράδειγμα 4.17. Σημεία P όπως το παραπάνω λέγονται *σαγματικά σημεία* (ή υπερβολικά σημεία) .

Εστω ότι $\Delta = M^2 - LN = 0$. Τότε υπάρχει μια ευθεία μηδενισμού και η $\mathbf{II}_{(a,b)}(u',v')$ έχει σταθερό πρόσημο. Οπότε πάλι η επιφάνεια βρίσκεται από την μιά μεριά του εφαπτόμενου επιπέδου και στην διεύθυνση της ευθείας μηδενισμού η κάμψη της είναι 'μικρή' ή μηδέν. Παράδειγμα τέτοιας επιφάνειας είναι ο κύλινδρος, βλ. παράδειγμα 4.18. Σημεία P όπως το παραπάνω λέγονται *παραβολικά σημεία*.

Σημειώνουμε τέλος ότι όταν $L = 0$, τότε $\Delta = M^2$, οπότε $\Delta \geq 0$. Αν $\Delta > 0$ τότε το σημείο είναι σαγματικο και αν $\Delta = 0$ τότε είναι παραβολικό εκτός από την περίπτωση όπου $L = M = N = 0$ δηλ. $\mathbf{II}_{(a,b)} = 0$. Αυτή η περίπτωση είναι απροσδιόριστη δηλ. μπορεί να συμβεί οτιδήποτε. Είναι το ανάλογο του κριτηρίου της δευτέρας παραγωγου για συναρτήσεις όπου και η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος είναι μηδέν.

4.4.3 Κύριες καμπυλότητες

Αρχίζουμε με μιά σημείωση. Εστω S επιφάνεια που δίδεται από την $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Εστω $(a, b) \in D$ και $P = \Phi(a, b)$. Οπως έχουμε δεί στην σημείωση 3.4 υπάρχει ένας ισομορφισμός ανάμεσα στους γραμμικούς χώρους $T_{(a,b)}D$ και $T_P S$ που δίδεται από $(u', v') \longmapsto \vec{w} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} u' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} v'$. Επομένως τις δύο θεμελιώδεις μορφές μπορούμε να τις δούμε ως συναρτήσεις $T_{(a,b)}D \longrightarrow \mathbb{R}$ είτε $T_P S \longrightarrow \mathbb{R}$. Στην πρώτη περίπτωση τις συμβολίζουμε με $\mathbf{I}_{(a,b)}$, $\mathbf{II}_{(a,b)}$ και στην δεύτερη με $\mathbf{I}_P$, $\mathbf{II}_P$. Θά έχουμε λοιπόν ότι $\mathbf{I}_{(a,b)}(u', v') = \mathbf{I}_P(\vec{w})$, $\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v') = \mathbf{II}_P(\vec{w})$. Από γεωμετρική άποψη ο χώρος $T_P S$ είναι πιό φυσιολογικός χώρος για πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων. Ομως, ενώ για την πρώτη μορφή έχουμε ότι $\mathbf{I}_P(\vec{w}) = || \vec{w} ||^2$, για την δεύτερη θεμελιώδη μορφή ο τύπος που την εκφράζει ως συνάρτηση του διανύσματος $\vec{w}$ είναι πιό σύνθετος και δεν τον έχουμε παρουσιάσει ακόμη. Επομένως, για να υπολογίσουμε την δεύτερη θεμελιώδη μορφή θα πρέπει να την θεωρήσουμε ως συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $T_{(a,b)}D$.

Οπως έχουμε πεί η κάθετη καμπυλότητα παραμένει σταθερή κατα μήκος των κατευθύνσεων στο επίπεδο των εφαπτόμενων διανυσμάτων $T_P S$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν όλα τα διανύσματα $\vec{w}$ με μέτρο $|| \vec{w} || = 1$. Εχουμε $\mathbf{I}_P(\vec{w}) = || \vec{w} ||^2 = 1$. Επομένως, η κάθετη καμπυλότητα της S στην κατεύθυνση του $\vec{w}$ ισούται με $K^{\text{normal}}_{P,S}(\vec{w}) = \mathbf{II}_P(\vec{w})$.

Η συνάρτηση $\mathbf{II}_P(\vec{w})$, καθώς το $\vec{w}$ μεταβάλλεται υπό την συνθήκη $\mathbf{I}_P(\vec{w}) = 1$, παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή (η συνθήκη αντιστοιχεί στα σημεία ενός κύκλου στο $T_P S$). Εστω κ_1, κ_2 η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της $K^{\text{normal}}_{P,S}(\vec{w})$. Αυτές λέγονται *κύριες καμπυλότητες* της επιφάνειας S στο σημείο P. Οι κατευθύνσεις στο $T_P S$ στις οποίες λαμβάνονται οι κύριες καμπυλότητες λέγονται *κύριες κατευθύνσεις*, τα δε αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα στο $T_P S$ κατά μήκος των κύριων κατευθύνσεων λέγονται *κύρια διανύσματα*. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση όπου $\kappa_1 = \kappa_2$, τότε η κάθετη καμπυλότητα της επιφάνειας στο P παραμένει σταθερή ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Ενα σημείο P με αυτή την ιδιότητα λέγεται *ομφαλικό*. Στην ειδικότερη περίπτωση που οι κύριες καμπυλότητες είναι και οι δύο ίσες με το μηδέν το σημείο P λέγεται *επιπεδικό*. Για παράδειγμα, όλα τα σημεία της σφαίρας είναι ομφαλικά. Ολα τα σημεία ενός επιπέδου είναι επιπεδικά. Οταν τώρα ένα σημείο δεν είναι ομφαλικό αποδεικνύουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.2 *Αν το σημείο P δεν είναι ομφαλικό σημείο της επιφάνειας S, τότε οι κύριες κατευθύνσεις στο $T_P S$ είναι κάθετες μεταξύ τους.*

Απόδειξη: Εστω κ_1 η μέγιστη από τις κύριες καμπυλότητες με αντίστοιχο (μοναδιαίο) κύριο διάνυσμα $\vec{e}_1$. Εστω $\vec{e}_2$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο e_1. Τότε έχουμε ότι $\vec{w} = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2$, όπου θ η γωνία των $\vec{e}_1$ και $\vec{w}$. Καθώς το θ μεταβάλλεται στο $[0, 2\pi]$ υλοποιούμε όλα τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{w}$. Εστω λοιπόν $K(\theta) = K_{P,S}(\vec{w}) = \mathbf{II}_P(\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} u_1' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} v_1' \\ \vec{e}_2 &= \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} u_2' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} v_2' \end{aligned}$$

Τότε

$$\vec{w}= \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(\cos\theta\, u_1' + \sin\theta\, u_2') + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(\cos\theta\, v_1' + \sin\theta\, v_2').$$

Αρα

$$\begin{aligned}
K(\theta) &= \mathbf{II}_{(a,b)}(\cos\theta\, u_1' + \sin\theta\, u_2',\ \cos\theta\, v_1' + \sin\theta\, v_2') \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\, u_1' + \sin\theta\, u_2' & \cos\theta\, v_1' + \sin\theta\, v_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\, u_1' + \sin\theta\, u_2' \\ \cos\theta\, v_1' + \sin\theta\, v_2' \end{pmatrix} \\
&= \cos^2\theta \begin{pmatrix} u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ v_1' \end{pmatrix} + \sin^2\theta \begin{pmatrix} u_2' & v_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix} \\
&+ 2\cos\theta\sin\theta \begin{pmatrix} u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix} \\
&= \cos^2\theta\, \mathbf{II}_{(a,b)}(u_1', v_1') + \sin^2\theta\, \mathbf{II}_{(a,b)}(u_2', v_2') + \sin 2\theta \begin{pmatrix} u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Εχουμε

$$k'(\theta) = \sin 2\theta\, (\mathbf{II}_{(a,b)}(u_2', v_2') - \mathbf{II}_{(a,b)}(u_1', v_1')) + 2\cos 2\theta\, (\begin{pmatrix} u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix}).$$

Από την υπόθεση, η $K(\theta)$ έχει ακρότατο όταν $\theta = 0$. Συνεπώς, θα πρέπει $K'(0) = 0$, που συνεπάγεται ότι

$$\begin{pmatrix} u_1' & v_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2' \\ v_2' \end{pmatrix} = 0. \tag{9}$$

Αρα,

$$K(\theta) = \cos^2\theta\, \mathbf{II}_{(a,b)}(u_1', v_1') + \sin^2\theta\, \mathbf{II}_{(a,b)}(u_2', v_2').$$

Σημειώνουμε ότι, από υπόθεση, η $K(\theta)$ έχει μέγιστο για $\theta = 0$ με μέγιστη τιμή $\kappa_1 = \mathbf{II}_{(a,b)}(u_1', v_1')$. Η ελάχιστη τιμή κ_2 αντιστοιχεί στην άλλη ρίζα της $K'(\theta) = 0$, ισοδύναμα, της $\sin 2\theta = 0$, άρα για $\theta = \pi/2$. Συνεπώς η άλλη κύρια κατεύθυνση είναι αυτή του $\vec{e_2}$ με κύρια καμπυλότητα $\kappa_2 = \mathbf{II}_{(a,b)}(u_2', v_2')$. $\diamondsuit$

Από την παραπάνω πρόταση και την απόδειξή της συνάγουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.1 (Τύπος του Euler) *Εστω, κ_1, κ_2 οι κύριες καμπυλότητες μιας επιφάνειας S σε ένα σημείο P, το οποίο δεν είναι ομφαλικό. Εστω $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ τα αντίστοιχα κύρια διανύσματα, που από την παραπάνω προταση αποτελούν μια ορθομοναδιαία βάση του T_PS. Εστω $\vec{w} \in T_PS$ ένα μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα που το γράφουμε ως $\vec{w} = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2$. Τότε $K_{P,S}(\vec{w}) = \cos^2\theta\, \kappa_1 + \sin^2\theta\, \kappa_2$.*

Στην πράξη τώρα, όταν μας ζητήσουν να βρούμε τις κύριες καμπυλότητες μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange: Πρέπει να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v')$ υπό την συνθήκη $\mathbf{I}_{(a,b)}(u', v') = 0$. Θα πρέπει $\nabla\mathbf{II}_{(a,b)}(u', v') = \mu\mathbf{I}_{(a,b)}(u', v')$, για κάποιο $\mu \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$\begin{aligned}
2Lu' + 2Mv' &= \mu(2Eu' + 2Fv') \\
2Mu' + 2Nv' &= \mu(2Fu' + 2Gv')
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
Lu' + Mv' - \mu(Eu' + Fv') &= 0 &(10)\\
Mu' + Nv' - \mu(Fu' + Gv') &= 0. &(11)
\end{aligned}
$$

Σημειώνουμε ότι οι λύσεις των παραπάνω ως προς (u', v') (απαλειφή του μ) δίδουν τις κύριες κατευθύνσεις στο $T_{(a,b)}D$. Ας βρούμε τώρα την ερμηνεία του μ που εμφανίζεται στις παραπάνω εξισώσεις. Πολλαπλασιάζοντας την (10) με u', την (11) με v' και προσθέτοντας έχουμε ότι

$$Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2 = \mu(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2) = \mu\,\mathbf{I}_{(a,b)}(u', v') = \mu\,.$$

Συνεπώς οι λύσεις των (10), (11) ως προς μ (απαλειφή των u', v') δίδουν τις κύριες καμπυλότητες.

Λύνουμε τώρα τις (10), (11) ως προς μ.

$$
\begin{aligned}
(L - \mu E)u' + (M - \mu F)v' = 0 &\implies (L - \mu E)u' = -(M - \mu F)v' &(12)\\
(M - \mu F)u' + (N - \mu G)v' = 0 &\implies (M - \mu F)u' = -(N - \mu G)v'. &(13)
\end{aligned}
$$

Διαιρώντας τις παραπάνω παίρνουμε $(L - \mu E)(N - \mu G) = (M - \mu F)^2$. Επομένως

$$(EG - F^2)\mu^2 - (EN + LG - 2MF)\mu + LN - M^2 = 0. \qquad (14)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (14) ως προς μ είναι οι κύριες καμπυλότητες.

Λύνουμε τώρα τις (10), (11) ως προς u', v'. Απαλείφοντας το μ παίρνουμε

$$\frac{Lu' + Mv'}{Mu' + Nv'} = \frac{Eu' + Fv'}{Fu' + Gv'}.$$

Επομένως

$$(LF - EM)u'^2 + (LG - NE)u'v' + (MG - NF)v'^2 = 0. \qquad (15)$$

Η παραπάνω είναι μια ομογενής εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς (u', v') και οι λύσεις της δίδουν τις κύριες κατευθύνσεις στο επίπεδο $T_{(a,b)}D$.

Σημειώνουμε ότι το σημείο P είναι ομφαλικό, αν και μόνον άν, κάθε κατεύθυνση είναι κύρια κατεύθυνση. Ισοδύναμα, αν και μόνον αν, η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις όλα τα (u', v') δηλ. οι συντελεστές της είναι μηδέν. Επομένως, το σημείο P είναι ομφαλικό, αν και μόνον αν, $\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = \rho$. Σημειώνουμε ότι αν στα παραπάνω κλάσματα ο παρονομαστής είναι μηδέν τότε και ο αριθμητής είναι μηδέν. Επίσης, το σημείο P είναι επιπεδικό αν και μόνον αν $\rho = 0$.

Ορισμός 4.5 *Εστω κ_1, κ_2 οι κύριες καμπυλότητες επιφάνειας S στο σημείο P. Ορίζουμε στο σημείο P τα παρακάτω:*
Καμπυλότητα Gauss: $K = K(P) = \kappa_1\kappa_2$.
Μέση καμπυλότητα $H = H(P) = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$.

Από την εξίσωση (14) έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} &(16)\\
H &= \frac{1}{2}\,\frac{EN + LG - 2MF}{EG - F^2}. &(17)
\end{aligned}
$$

Σημειώνουμε ότι το σημείο P είναι ελλειπτικό αν $K(P) > 0$, είναι σαγματικό αν $K(P) < 0$ και είναι παραβολικό αν $K(P) = 0$ (με μία όμως των $\kappa_1, \kappa_2 \neq 0$). Επίσης, από τα παραπάνω συνάγομε ότι οι κύριες καμπυλότητες δίδονται από τον τύπο

$$\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Σημειώνουμε ότι $\sqrt{H^2 - K} = \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2 \geq 0$. Επίσης, το σημείο P είναι ομφαλικό αν $\kappa_1 = \kappa_2$, δηλ. $H^2 = K$.

Παράδειγμα 4.20 Ας εφαρμόσουμε τώρα τα παραπάνω για το σημείο $P = (0,0,0)$ της επιφάνειας $\Phi(u,v) = (u,v,uv)$ του παραδείγματος 4.17. Εχουμε

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad L = 0, \quad M = 2, \quad N = 0.$$

Συνεπώς από τους τύπους (16),(17) έχουμε

$$K = \frac{0-4}{1-0} = -4, \quad H = \frac{1}{2}\,\frac{0+0+0}{1-0} = 0.$$

Αρα οι κύριες καμπυλότητες είναι οι ρίζες της $x^2 - 2Hx + K = 0$ δηλ. $x^2 - 4 = 0$, δηλ. $\kappa_{1,2} = \pm 2$. Η εξίσωση (15) που δίδει τις κύριες κατευθύνσεις στο $T_{(0,0)}D$ είναι η $-2u'^2 + 2v'^2 = 0$, άρα $u' = \pm v'$. Επομένως τα κύρια διανύσματα στο T_PS είναι τα $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,1,0 >$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,-1,0 >$. Αν λοιπόν $\vec{w} \in T_PS = \{z = 0\}$ τότε $\vec{w} =< x_1, x_2, 0 >= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)\, \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)\, \vec{e}_2$. Αρα από τον τύπο του Euler έχουμε $K_{P,S}^{\mathrm{normal}}(\vec{w}) = 2\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2 + (-2)\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$.

Πρόταση 4.3 *Αν όλα τα σημεία μιας επιφάνειας είναι επιπεδικά τότε η επιφάνεια είναι επίπεδο.*

Απόδειξη: Εστω ότι η επιφάνεια S ορίζεται από την $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $L = M = N = 0$, $\forall (u,v) \in D$. Εχουμε ότι

$$\begin{aligned}
L(u,v) &= \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u^2}(u,v) \cdot \vec{N}(u,v) = -\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial u}(u,v)\ , \\
M(u,v) &= \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u \partial v}(u,v) \cdot \vec{N}(u,v) = -\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}(u,v) = -\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial u}(u,v)\ , \\
N(u,v) &= \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial v^2}(u,v) \cdot \vec{N}(u,v) = -\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}(u,v).
\end{aligned}$$

Οι δεξιές ισότητες προκύπτουν από τις σχέσεις $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u,v) \cdot \vec{N}(u,v) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u,v) \cdot \vec{N}(u,v) = 0$. Επίσης, $\vec{N}(u,v) \cdot \vec{N}(u,v) = 0$ άρα

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial u}(u,v) \cdot \vec{N}(u,v) = 0 = \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}(u,v) \cdot \vec{N}(u,v)$$

Επομένως, για κάθε $(u,v) \in D$, τα διανύσματα $\frac{\partial \vec{N}}{\partial u}(u,v)$, $\frac{\partial \vec{N}}{\partial v}(u,v)$ ανήκουν στο επίπεδο των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο $P = \Phi(u,v)$. Συνεπώς, υπάρχουν συναρτήσεις

$a, b, c, d : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{N}}{\partial u} &= a\,\frac{\partial \vec{X}}{\partial u} + b\,\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}\,,\\ \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} &= c\,\frac{\partial \vec{X}}{\partial u} + d\,\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}\,.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους του $\vec{N}$ στις σχέσεις $L = M = N = 0$ έχουμε ότι

$$aE + bF = cF + dG = aF + bG = cE + dF = 0.$$

Αυτό είναι ένα σύστημα 4 εξισώσεων με αγνώστους τα a, b, c, d που η ορίζουσά του είναι $(EG - F^2)^2 > 0$. Συνεπώς έχει την μηδενική λύση ως μοναδική λύση. Αρα $a, b, c, d = 0$ που συνεπάγεται ότι

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = \vec{0}$$

και επομένως $\vec{N}=\vec{0}$. Ορίζουμε την συνάρτηση $f(u,v) = \vec{X}\,(u,v)\cdot \vec{N}\,(u,v)$. Τότε $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}\cdot \vec{N}= 0$ και $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}\cdot \vec{N}= 0$. Επομένως $f(u,v) = c$ σταθερή, δηλ. $\vec{X}\cdot\vec{N}= c$. Τότε όμως, αν διαλέξουμε κάποιο $(a,b) \in D$ θα έχουμε $(\vec{X}\,(u,v) - \vec{X}\,(a,b))\cdot \vec{N}= 0$ και άρα η επιφάνεια είναι επίπεδη. $\diamondsuit$

Σημείωση 4.8 Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν όλα τα σημεία μιας επιφάνειας είναι ομφαλικά, μη επιπεδικά, τότε η επιφάνεια είναι σφαίρα.

4.4.4 Συναλλοίωτη παράγωγος και καμπυλότητα

Εστω $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και $Q \in D$, $\vec{w}\in T_QD$. Η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f ως προς το διάνυσμα $\vec{w}$ ορίζεται ως $d_{\vec{w}}f = \nabla f|_Q\cdot \vec{w}$. Αν $\alpha : I \longrightarrow D$ επίπεδη καμπύλη με $\alpha(t_0) = Q$, $\alpha'(t_0) = \vec{w}$ τότε, από τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε ότι $d_{\vec{w}}f = (f \circ \alpha)'(t_0)$. Επίσης, από τον ορισμό φαίνεται εύκολα ότι $d_{c_1\vec{w}_1+c_2\vec{w}_2}f = c_1 d_{\vec{w}_1}f + c_2 d_{\vec{w}_2}f$. Τέλος, αν $\vec{e}_1 = <1,0>$ και $\vec{e}_2 = <0,1>$ τότε $d_{\vec{e}_1}f = \frac{\partial f}{\partial u}$ και $d_{\vec{e}_2}f = \frac{\partial f}{\partial v}$. Επομένως αν εκφράσουμε το $\vec{w}\in T_QD$ ως $\vec{w}= c_1\,\vec{e}_1 + c_2\,\vec{e}_2$ τότε $d_{\vec{w}}f = c_1\frac{\partial f}{\partial u} + c_2\frac{\partial f}{\partial v}$.

Εστω τώρα S μια επιφάνεια που ορίζεται από την $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Γνωρίζουμε ότι σε κάθε σημείο $P = \Phi(u,v) \in S$ μπορούμε να ορίσουμε το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{N}\,(u,v)$. Επομένως ορίζουμε μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{N}: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $(u,v) \longmapsto \vec{N}\,(u,v)$. Γράφουμε $\vec{N}\,(u,v) = <x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)>$, όπου $x_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Εστω $\vec{v}\in T_PS$. Θα ορίσουμε τώρα το ανάλογο της κατά κατεύθυνση παραγώγου μια συνάρτησης για την περίπτωση της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{N}$. Αυτη θα είναι η λεγόμενη *συναλλοίωτη παράγωγος* της $\vec{N}$ ως προς το διάνυσμα $\vec{v}$, συμβ. $\nabla_{\vec{v}}\,\vec{N}$, που ορίζεται ως ακολούθως. Γράφουμε $\vec{v}=$

$\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}u' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}v'$ και έστω $\vec{w}=< u', v' >\in T_Q D$. Τότε $\nabla_{\vec{v}} \vec{N}:=< d_{\vec{w}}x_1, d_{\vec{w}}x_2, d_{\vec{w}}x_3 >$. Αν $\alpha : I \longrightarrow S$ μια επιφανειακή καμπύλη με $\alpha(t_0) = P$, $\alpha'(t_0) =\vec{v}$ συμβολίζουμε με $\vec{N}(t) := (\vec{N} \circ \alpha)(t)$. Τότε, από τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε ότι $\nabla_{\vec{v}} \vec{N}=\vec{N}'(t_0)$. Επίσης, από τον ορισμό φαίνεται εύκολα ότι $\nabla_{c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2} \vec{N}= c_1\nabla_{\vec{v}_1} \vec{N} +c_2\nabla_{\vec{v}_2} \vec{N}$. Τέλος, $\nabla_{\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}} \vec{N}= \frac{\partial \vec{N}}{\partial u}$ και $\nabla_{\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}} \vec{N}= \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}$. Επομένως, αν γράψουμε $\vec{v}= \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}u' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}v'$ τότε $\nabla_{\vec{v}} \vec{N}= \frac{\partial \vec{N}}{\partial u}u'+\frac{\partial \vec{N}}{\partial v}v'$. Αρα θα έχουμε και ότι $\nabla_{\vec{v}} \vec{N}\in T_P S$, αφού $\frac{\partial \vec{N}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} \in T_P S$.

Πρόταση 4.4 *Εχουμε* $\mathbf{II}_P(\vec{v}) = -\nabla_{\vec{v}} \vec{N} \cdot \vec{v}$.

Απόδειξη: Αρκεί να το δείξουμε για $\vec{v}$ με $\| \vec{v} \| = 1$. Πράγματι, αν γράψουμε $\vec{v}= \lambda \vec{v}_1$, όπου $\| \vec{v}_1 \| = 1$ τότε $\mathbf{II}_P(\vec{v}) = \lambda^2 \mathbf{II}_P(\vec{v}_1)$ και $\nabla_{\vec{v}} \vec{N} \cdot \vec{v}= \nabla_{\lambda\vec{v}_1} \vec{N} \cdot\lambda \vec{v}_1= \lambda^2 \nabla_{\vec{v}_1} \vec{N} \cdot \vec{v}_1$. Εστω λοιπόν $\| \vec{v} \| = 1$. Εστω $\alpha : I \longrightarrow M$ μια επιφανειακή καμπύλη, παραμετρισμένη ως προς μήκος τόξου, με $\alpha(t_0) = P$, $\alpha'(t_0) =\vec{v}$. Θέτουμε $\vec{N}(t) = (\vec{N} \circ \alpha)(t)$. Τότε $\mathbf{II}_P(\vec{v}) = \kappa_\alpha^{\text{normal}}(t_0) =\vec{N}(t_0) \cdot \alpha''(t_0)$. Είναι $\vec{N}(t) \cdot \alpha'(t) = 0$, άρα $\vec{N}'(t) \cdot \alpha'(t) = -\vec{N}(t) \cdot \alpha''(t)$. Ομως $\vec{N}'(t_0) = \nabla_{\vec{v}} \vec{N}$, $\alpha'(t_0) =\vec{v}$ και άρα το ζητούμενο.

Για μια διαφορετική απόδειξη: Γράφουμε $\vec{v}= \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}u' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}v'$. Τότε $\nabla_{\vec{v}} \vec{N}= \frac{\partial \vec{N}}{\partial u}u' + \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}v'$ και άρα

$$\begin{aligned} -\nabla_{\vec{v}} \vec{N} \cdot \vec{v} &= (\frac{\partial \vec{N}}{\partial u}u' + \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}v')(frac\partial \vec{X}\partial uu' + \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}v') \\ &= -\frac{\partial \vec{N}}{\partial u}\frac{\partial \vec{X}}{\partial u}u'^2 - (\frac{\partial \vec{N}}{\partial v}\frac{\partial \vec{X}}{\partial u} + \frac{\partial \vec{N}}{\partial u}\frac{\partial \vec{X}}{\partial v})u'v' - \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}\frac{\partial \vec{X}}{\partial v}v'^2 \\ &= Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2. \end{aligned}$$

Αυτό που ζητούσαμε. $\diamondsuit$

Εστω $P \in S$ μη ομφαλικό σημείο της επιφάνειας. Από την πρόταση 4.2 γνωρίζουμε ότι τα (μοναδιαία) κύρια διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Πρόταση 4.5 *Εστω κ_1, κ_2 οι κύριες καμπυλότητες που αντιστοιχούν στα κύρια διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Εχουμε τα εξής.*

1. $\nabla_{\vec{e}_1} \vec{N} \cdot \vec{e}_2= 0 = \nabla_{\vec{e}_2} \vec{N} \cdot \vec{e}_1$.

2. $\kappa_1 = -\nabla_{\vec{e}_1} \vec{N} \cdot \vec{e}_1$, $\kappa_2 = -\nabla_{\vec{e}_2} \vec{N} \cdot \vec{e}_2$.

3. $\nabla_{\vec{e}_1} \vec{N}= -\kappa_1 \vec{e}_1$, $\nabla_{\vec{e}_2} \vec{N}= -\kappa_2 \vec{e}_2$.

Απόδειξη: Η απόδειξη του 1. είναι άμεση συνέπεια της σχέσης (9) στην απόδειξη της πρότασης 4.2. Το 2. είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 4.4. Για το 3. έχουμε ότι $\nabla_{\vec{e}_1} \vec{N}\in T_P S$ και άρα $\nabla_{\vec{e}_1} \vec{N}= c_1 \vec{e}_1 +c_2 \vec{e}_2$, όπου $c_1 = \nabla_{\vec{e}_1} \vec{N} \cdot \vec{e}_1$, $c_2 = \nabla_{\vec{e}_1} \vec{N} \cdot \vec{e}_2$. Από τα 1.,2. έχουμε αυτό που ζητάμε.

4.4.5 Ειδικές καμπύλες σε επιφάνεια

Θα μελετήσουμε τώρα ειδικές καμπύλες σε επιφάνειες.

Ορισμός 4.6 *Κύρια καμπύλη σε μια επιφάνεια είναι μια επιφανειακή καμπύλη όπου σε κάθε σημείο της το διάνυσμα ταχύτητάς της δείχνει προς μια κύρια κατεύθυνση. Δηλ. μια κύρια καμπύλη διατρέχει την S σε κατευθύνσεις ως προς τις οποίες η κλίση της επιφάνειας (δηλ. η κάθετη καμπυλότητα) έχει ακρότατη τιμή.*

Πριν προχωρήσουμε στην μελέτη των κύριων καμπυλών θα αναφέρουμε ένα θεώρημα των διαφορικών εξισώσεων. Εστω, ως συνήθως, S μια επιφάνεια που ορίζεται από την $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $Q \in D$ με $\Phi(Q) = P \in S$ και $U \subseteq D$ ανοικτός δίσκος που περιέχει το σημείο Q. Εστω $\vec{F}: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια διανυσματική συνάρτηση με την ιδιότητα ότι $\vec{F}(u,v) \in T_{\Phi(u,v)}S$. Μια τέτοια διανυσματική συνάρτηση λέμε ότι ορίζει ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια S σε μια γειτονιά του σημείου P. Ενα βασικό θεώρημα των διαφορικών εξισώσεων αναφέρει τα εξής. Διαλέγοντας το U αρκετά μικρό, υπάρχει μοναδική επιφανειακή καμπύλη $\alpha = \Phi \circ \alpha_1, \quad \alpha_1 : I \longrightarrow U$, με $\alpha(t_0) = P$ και με την ιδιότητα ότι $\alpha'(t) = \vec{F}(\alpha_1(t))$, για κάθε $t \in I$. Μια τέτοια καμπύλη λέγεται *η ολοκληρωτική καμπύλη* του εφαπτόμενου διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ που διέρχεται από το P.

Εστω τώρα $P = \Phi(Q)$ ένα μη ομφαλικό σημείο της S. Τότε στο σημείο P οι κύριες καμπυλότητες είναι διαφορετικές μεταξύ τους, και από συνέχεια έχουμε ότι και σε μια γειτονιά τού P εξακολουθεί να ισχύει το ίδιο. Επομένως, αν P μή ομφαλικό τότε και σε μια γειτονιά του τα σημεία είναι μή ομφαλικά. Επομένως υπάρχει ανοικτός δίσκος $U \subseteq D$ που περιέχει το σημείο Q με την ιδιότητα ότι $\Phi(u,v)$ μη ομφαλικό, για κάθε $(u,v) \in U$. Γνωρίζουμε ότι σε κάθε τέτοιο σημείο $\Phi(u,v)$ υπάρχουν δύο κύρια διανύσματα $\vec{e}_1(u,v)$ και $\vec{e}_2(u,v)$ που αντιστοιχούν στην μέγιστη και ελάχιστη κάθετη καμπυλότητα. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε δύο εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία $\vec{e}_i: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$ με $(u,v) \longmapsto \vec{e}_i(u,v)$. Από το παραπάνω θεώρημα των διαφορικών εξισώσεων υπάρχει, για κάθε $i = 1, 2$, ακριβώς μια ολοκληρωτική καμπύλη που περνάει από το P. Κάθε τέτοια καμπύλη είναι, εξ' ορισμού, μια κύρια καμπύλη. Επομένως από κάθε μη ομφαλικό σημείο P υπάρχουν ακριβώς δύο κύριες καμπύλες που περνάνε από το P. Σημειώνουμε ότι αν το σημείο είναι ομφαλικό τότε κάθε κατεύθυνση είναι κύρια και η μορφή των κύριων καμπυλών που διέρχονται από εκεί μπορεί να γίνει αρκετά περίπλοκη.

Η παρακάτω πρόταση δίδει ένα κριτήριο για το πότε μια επιφανειακή καμπύλη είναι κύρια.

Πρόταση 4.6 *Μια επιφανειακή καμπύλη $\alpha : I \longrightarrow S$ είναι κύρια καμπύλη αν καί μόνον αν $\nabla_{\alpha'(t)} \vec{N}$ είναι συγραμμικό με το $\alpha'(t)$, για κάθε $t \in I$.*

Απόδειξη: Εστω α κύρια καμπύλη, τότε το $\alpha'(t)$ ορίζει μια κύρια διεύθυνση άρα θα είναι πολλαπλάσιο κάποιου των κύριων διανυσμάτων στο αντίστοιχο σημείο, π.χ. $\alpha'(t) = \lambda\, \vec{e}_1$. Τότε όμως $\nabla_{\alpha'(t)} \vec{N} = \lambda \nabla_{\vec{e_1}} \vec{N} = -\lambda \kappa_1 \vec{e_1}$, από την πρόταση 4.5. Επομένως, $\nabla_{\alpha'(t)} \vec{N} = -\kappa_1 \alpha'(t)$, αυτό που θέλαμε.

Αντίστροφα, έστω $\nabla_{\alpha'(t)} \overrightarrow{N} = \lambda\alpha'(t)$, για κάθε $t \in I$. Γράφουμε το $\alpha'(t) = c_1 \overrightarrow{e}_1 + c_2 \overrightarrow{e}_2$. Τότε $\nabla_{\alpha'(t)} \overrightarrow{N} = c_1\nabla_{\overrightarrow{e}_1} \overrightarrow{N} + c_2\nabla_{\overrightarrow{e}_2} \overrightarrow{N}$ και από την πρόταση 4.5 έχουμε ότι $\nabla_{\alpha'(t)} \overrightarrow{N} = -c_1\kappa_1 \overrightarrow{e}_1 - c_2\kappa_2 \overrightarrow{e}_2$. Συνεπώς, έχουμε ότι $\lambda(c_1 \overrightarrow{e}_1 + c_2 \overrightarrow{e}_2) = -c_1\kappa_1 \overrightarrow{e}_1 - c_2\kappa_2 \overrightarrow{e}_2$ και επομένως $\lambda c_1 = -c_1\kappa_1$ και $\lambda c_2 = -c_2\kappa_2$. Αν $c_1 = 0$ τότε $\alpha'(t) = c_2 \overrightarrow{e}_2$ και άρα το $\alpha'(t)$ θα ορίζει κύρια κατεύθυνση. Εστω, τώρα $c_1 \neq 0$. Τότε, $\lambda = -\kappa_1$ και επομένως, $\kappa_1 c_2 = c_2\kappa_2$. Αν $\kappa_1 = \kappa_2$, τότε το αντίστοιχο σημείο $\alpha(t)$ είναι ομφαλικό και επομένως, αφού κάθε κατεύθυνση είναι κύρια, τότε και το $\alpha'(t)$ θα ορίζει κύρια κατεύθυνση. Διαφορετικά, αν $\kappa_1 \neq \kappa_2$, τότε $c_2 = 0$ και επομένως, πάλι, το $\alpha'(t)$ θα ορίζει κύρια κατεύθυνση. $\diamondsuit$

Στην πράξη τώρα όταν θέλουμε να βρούμε τις κύριες καμπύλες μιας επιφάνειας δουλεύουμε ως εξής. Οι κύριες καμπύλες είναι επιφανειακές καμπύλες, δηλ. καμπύλες της μορφής $\alpha = \alpha_1 \circ \Phi$ με $\alpha_1 : I \longrightarrow D$ όπου, γιά κάθε t, τό $\alpha'(t)$ δεικνύει σε μια κύρια κατεύθυνση. Αν $\alpha_1(t) = (u(t), v(t))$, τότε σύμφωνα με την ανάλυση που κάναμε στην παράγραφο 4.4.3, θα πρέπει οι συναρτήσεις $u' = u'(t)$, $v' = v'(t)$ να ικανοποιούν την (διαφορική) εξίσωση (15). Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης δίδει τις κύριες καμπύλες.

Παράδειγμα 4.21 Ας βρούμε τις κύριες καμπύλες του τόρου $\Phi(u, v) = ((2 + \cos u)\cos v,\ (2 + \cos u)\sin v,\ \sin u)$. Κάνοντας τους κατάλληλους υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$$\begin{array}{lll} E = 1, & F = 0, & G = (2 + \cos u)^2 \\ L = 1, & M = 0, & N = (2 + \cos u)\cos u. \end{array}$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση (15) γίνεται

$$[(2 + \cos u)^2 - (2 + \cos u)\cos u]u'v' = 0 \Longleftrightarrow 2(2 + \cos u)u'v' = 0 \Longleftrightarrow u'v' = 0.$$

Αρα $u' = 0$ είτε $v' = 0$, οι λύσεις των οποίων δίδουν δύο οικογένειες καμπυλών τις $u = u_0$ και $v = v_0$. Επομένως, από κάθε σημείο $(u_0, v_0) \in D$ περνούν δύο τέτοιες καμπύλες, οι $\alpha_1(t) = (u_0, v_0 + t)$ και $\beta_1(t) = (u_0 + t, v_0)$. Επομένως από κάθε σημείο $\Phi(u_0, v_0)$ του τόρου διέρχονται δύο κύριες καμπύλες οι

$$\begin{array}{rcl} \alpha(t) & = & ((2 + \cos u_0)\cos(v_0 + t),\ (2 + \cos u_0)\sin(v_0 + t),\ \sin u_0) \text{ και} \\ \beta(t) & = & ((2 + \cos(u_0 + t))\cos v_0,\ (2 + \cos(u_0 + t))\sin v_0,\ \sin(u_0 + t)). \end{array}$$

Πόρισμα 4.2 *Εστω α επιφανειακή καμπύλη που είναι η τομή της επιφάνειας S με κάποιο επίπεδο Π. Αν η γωνία των S και Π είναι σταθερή σε κάθε σημείο της καμπύλης, τότε η καμπύλη είναι κύρια. (Γωνία επιπέδου Π με επιφάνεια S σε σημείο P της επιφάνειας S, ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο Π με το επίπεδο T_PS).*

Απόδειξη: Εστω $\overrightarrow{q}$ τό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του Π και $\overrightarrow{N}(t)$ το (μοναδιαίο) κάθετο διάνυσμα της S στο σημείο $\alpha(t)$. Τότε, από υπόθεση, η γωνία των $\overrightarrow{q}$ και $\overrightarrow{N}(t)$ είναι σταθερή, ανεξάρτητη του t. Αν η γωνία αυτή είναι μηδέν ή π τότε $\overrightarrow{N}(t) = \pm \overrightarrow{q}$ και άρα $\overrightarrow{N}'(t) = 0$, $\forall t$, δηλ. $\nabla_{\alpha'(t)} \overrightarrow{N} = 0$ και άρα συγγραμμικό με το $\alpha'(t)$, $\forall t$. Επομένως από την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι η α είναι κύρια καμπύλη.Υποθέτουμε τώρα ότι η γωνία των διανυσμάτων δεν είναι μηδέν ή π. Σε αυτή την περίπτωση τα $\vec{N}(t)$ και $\vec{q}$ θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα για κάθε t. Θα έχουμε $\vec{q} \cdot \vec{N}(t)$ =σταθερό και άρα $\vec{q} \cdot \vec{N}'(t) = 0$. Επομένως το διάνυσμα $\vec{N}'(t) = \nabla_{\alpha'(t)} \vec{N}$ είναι κάθετο στο $\vec{q}$ όπως, επίσης, και στο $\vec{N}(t)$ (αφού είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στην επιφάνεια). Το ίδιο όμως ισχύει και για το διάνυσμα $\alpha'(t)$ αφού είναι από την μια πλευρά διάνυσμα του επιπέδου Π και από την άλλη εφαπτόμενο στην S. Συνεπώς τα $\nabla_{\alpha'(t)} \vec{N}$ και $\alpha'(t)$ είναι συγγραμμικά, γιά κάθε t, και άρα η καμπύλη είναι κύρια. $\diamondsuit$

Θα μελετήσουμε τώρα ένα δεύτερο είδος καμπυλών της επιφάνειας, τις ασυμπτωτικές καμπύλες. Σε αναλογία με τις κύριες καμπύλες αυτές αντιστοιχούν στις ασυμπτωτικές κατευθύνσεις που ορίζονται ως εξής.

Ορισμός 4.7 *1. Ασυμπτωτική κατεύθυνση της επιφάνειας S στο σημείο P είναι μια κατεύθυνση του T_PS ως προς την οποία η κάθετη καμπυλότητα είναι μηδέν.*
2. Ασυμπτωτική καμπύλη σε μια επιφάνεια είναι μια επιφανειακή καμπύλη όπου σε κάθε σημείο της το διάνυσμα ταχύτητάς της δείχνει προς μια ασυμπτωτική κατεύθυνση. Δηλ. μια συμπτωτική καμπύλη διατρέχει την S σε κατευθύνσεις όπου η κλίση της επιφάνειας (δηλ. η κάθετη καμπυλότητα) είναι μηδέν.

Πρόταση 4.7 *Εστω P σημείο επιφάνειας S και $K(P)$ η καμπυλότητα Gauss στο P. Τότε*
1. Αν $K(P) > 0$, δηλ. το P είναι ελλειπτικό σημείο, τότε δεν υπάρχουν ασυμπτωτικές κατευθύνσεις στο P.
2. Αν $K(P) < 0$, δηλ. το P είναι σαγματικό (υπερβολικό) σημείο, τότε υπάρχουν ακριβώς δύο ασυμπτωτικές κατευθύνσεις οι οποίες διχοτομούνται από τις κύριες κατευθύνσεις κατά γωνία θ, για την οποία ισχύει ότι $\tan^2\theta = -\frac{\kappa_1(P)}{\kappa_2(P)}$.
3. Αν $K(P) = 0$, τότε αν το P είναι παραβολικό (δηλ. μία των $\kappa_1(P), \kappa_2(P)$ είναι $\neq 0$ και η άλλη $= 0$), τότε υπάρχει ακριβώς μια ασυμπτωτική κατεύθυνση, η οποία είναι και κύρια. Αν το P είναι επιπεδικο, δηλ. $\kappa_1(P) = 0 = \kappa_2(P)$, τότε κάθε κατεύθυνση είναι ασυμπτωτική.

Απόδειξη: Σημειώνουμε πρώτα ότι αν το σημείο P είναι ομφαλικό, δηλ. $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, τότε αν $\kappa \neq 0$, δηλ. το σημείο είναι ελλειπτικό θα έχουμε ότι $K_{P,S}^{\mathrm{normal}}(\vec{w}) = \kappa \neq 0$, $\forall \vec{w} \in T_PS$. Αρα δεν υπάρχουν ασυμπτωτικές κατευθύνσεις. Από την άλλη μεριά, αν $\kappa \neq 0$, δηλ. το σημείο είναι επιπεδικό, τότε $K_{P,S}^{\mathrm{normal}}(\vec{w}) = \kappa = 0$, $\forall \vec{w} \in T_PS$ και άρα κάθε κατεύθυνση είναι ασυμπρτωτική. Υποθέτουμε τώρα ότι το σημείο P είναι δεν είναι ομφαλικό. Η απόδειξη σε αυτήν την περίπτωση είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 4.2 και του τύπου του Euler, βλ. πόρισμα 4.1. Αν $\vec{w} \in T_PS$ τότε διατηρώντας τον συμβολισμό του πορίσματος 4.1 έχουμε ότι $K_{P,S}(\vec{w}) = \cos^2\theta\, \kappa_1(P) + \sin^2\theta\, \kappa_2(P)$. Αν λοιπόν $K(P) > 0$, τότε $\kappa_1(P), \kappa_2(P)$ είναι ομόσημα (θετικά ή αρνητικά) και από τον παραπάνω τύπο βλέπουμε ότι για οποιαδήποτε επιλογή του $\vec{w} \in T_PS$ το $K_{P,S}(\vec{w})$ θα είναι αντιστοίχως θετικό ή αρνητικό και άρα $\neq 0$. Συνεπώς δεν έχουμε ασυμπτωτικές διευθύνσεις. Αν $K(P) < 0$ τότε τα $\kappa_1(P), \kappa_2(P)$ είναι ετερόσημα και έστω π.χ. $\kappa_1(P) > 0, \kappa_2(P) > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση $K_{P,S}(\vec{w}) = 0$ αν και μόνον αν η γωνία θ που καθορίζει το $\vec{w}$ ικανοποιεί την εξίσωση $\tan^2\theta = -\frac{\kappa_1(P)}{\kappa_2(P)} > 0$. Υπάρχουν δύο κατευθύνσεις που ικανοποιούν αυτή την εξίσωση οι οποίες διχοτομούνται από το κύριο διάνυσμα $\vec{e_1}$. Τέλος, αν $K(P) = 0$ με π.χ. $\kappa_1(P) \neq 0$, τότε θα έχουμε ότι $K_{P,S}(\vec{w}) = \cos^2\theta\ \kappa_1(P)$ και άρα $K_{P,S}(\vec{w}) = 0$ ακριβώς όταν $\cos\theta = 0$ δηλ. το $\vec{w}$ δείχνει στην κύρια κατεύθυνση που ορίζει το κύριο διάνυσμα $\vec{w}$. Από την άλλη, αν $K(P) = 0$ με $\kappa_1(P) = 0 = \kappa_2(P)$ τότε προφανώς $K_{P,S}(\vec{w}) = 0$ για κάθε $\vec{w} \in T_PS$. $\diamondsuit$

Παράδειγμα 4.22 Στην περίπτωση του τόρου του παραδείγματος 4.21, έχουμε από τον τύπο (16) ότι η καμπυλότητα Gauus $K(u,v) = \frac{\cos u}{2+\cos u}$. Επομένως από κάθε σημείο $P = \Phi(u,v)$ με $\cos u > 0$, δηλ. από κάθε σημείο P που βρίσκεται στο 'εξωτερικό' κομμάτι του τόρου, δεν υπάρχουν ασυμπτωτικές κατευθύνσεις. Από κάθε σημείο $P = \Phi(u,v)$ με $\cos u < 0$, δηλ. από κάθε σημείο P που βρίσκεται στο 'εσωτερικό' κομμάτι του τόρου, υπάρχουν δύο ασυμπτωτικές κατευθύνσεις και τέλος, από κάθε σημείο $P = \Phi(u,v)$ με $\cos u = 0$, δηλ. από κάθε σημείο P που βρίσκεται στον 'πάνω' και 'κάτω' κύκλο του τόρου, υπάρχει μία ασυμπτωτική κατεύθυνση.

Στην πράξη τώρα όταν θέλουμε να βρούμε τις ασυμπτωτικές καμπύλες δουλεύουμε όπως και στην περίπτωση των κύριων καμπυλων. Οι ασυμπτωτικές καμπύλες είναι επιφανειακές καμπύλες, δηλ. καμπύλες της μορφής $\alpha = \alpha_1 \circ \Phi$ με $\alpha_1 : I \longrightarrow D$ όπου, γιά κάθε t, τό $\alpha'(t)$ δεικνύει σε μια ασυμπτωτική κατεύθυνση. Αν $\alpha_1(t) = (u(t), v(t))$, θα πρέπει οι συναρτήσεις $u' = u'(t)$, $v' = v'(t)$ να ικανοποιούν την (διαφορική) εξίσωση $L(u,v)u'^2 + 2M(u,v)u'v' + N(u,v)v'^2 = 0$. Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης δίδει τις ασυμπτωτικές καμπύλες.

Η παρακάτω πρόταση δίδει ένα κριτήριο για το πότε μια επιφανειακή καμπύλη είναι ασυμπτωτική.

Πρόταση 4.8 *Μια επιφανειακή καμπύλη $\alpha : I \longrightarrow S$ είναι ασυμπτωτική καμπύλη αν καί μόνον αν $\alpha''(t) \in T_{\alpha(t)}S$, για κάθε $t \in I$.*

Απόδειξη: Πράγματι, έστω $\vec{N}(t)$ το (μοναδιαίο) κάθετο διάνυσμα της S στο σημείο $\alpha(t)$. Εχουμε $\alpha'(t) \cdot \vec{N}(t) = 0$ και άρα $\alpha'(t) \cdot \vec{N}'(t) + \alpha''(t) \cdot \vec{N}(t) = 0$. Υπενθυμίζουμε ότι $\vec{N}'(t) = \nabla_{\alpha'(t)} \vec{N}$ και άρα από την πρόταση 4.4 έχουμε ότι $K_{P,S}(\alpha'(t)) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{II}_P(\alpha'(t)) = 0 \Longleftrightarrow \alpha'(t) \cdot \vec{N}'(t) = 0$. Επομένως η α είναι ασυμπτωτική καμπύλη, αν και μόνον αν, $\alpha''(t) \cdot \vec{N}(t) = 0, \forall t \in I$, δηλ. $\alpha''(t) \in T_{\alpha(t)}S$, για κάθε $t \in I$.