ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2013-14
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Ασκηση 1. Εστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα και $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Θωρούμε την καμπύλη $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (t, f(t))$. Αν $a, b \in I$ με $a < b$, δείξτε ότι το μήκος το μήκος τόξου $L_b^a(\gamma)$ τής καμπύλης από το σημείο $\gamma(a)$ έως το σημείο $\gamma(b)$ ισούται με:

$$L_b^a(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt \,.$$

Ασκηση 2. Δείξτε ότι το μήκος τής παραβολής $x^2 = 2py$, $p > 0$, από το σημείο $(0,0)$ έως το σημείο $(a, \frac{a^2}{2p})$, $a > 0$, ισούται με

$$\frac{1}{2p}[a\sqrt{a^2+p^2} \, + \, p^2 \log\frac{a + \sqrt{a^2+p^2}}{p}\,] \,.$$

Ασκηση 3. Εστω $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια κανονική καμπύλη. Δείξτε ότι
(α) Η γ έχει σταθερή ταχύτητα αν και μόνον αν το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\ddot{\gamma}\,(t)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα ταχύτητας (εφαπτόμενο διάνυσμα) $\dot{\gamma}\,(t)$, για κάθε $t \in I$.
(β) Η γ είναι αναπαραμέτριση ευθείας αν και μόνον αν το το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\ddot{\gamma}\,(t)$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα ταχύτητας (εφαπτόμενο διάνυσμα) $\dot{\gamma}\,(t)$, για κάθε $t \in I$.

Ασκηση 4. Παραμετρίστε ως προς μήκος τόξου (δηλ. βρείτε μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας) την καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (3\cos e^t, 3\sin e^t)$.

Ασκηση 5. Παραμετρίστε ως προς μήκος τόξου (δηλ. βρείτε μια αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας) την καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a, b > 0$.