ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2013-14
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4

Ασκηση 1. Έστω $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη τού χώρου, παραμετρημένη ως προς μήκος τόξου, με καμπυλότητα που ικανοποιεί $|\kappa| < M$, για κάποιον θετικό M. Εστω R αριθμός με $0 < R < 1/M$. Ορίζουμε τον R-σωλήνα γύρω από την καμπύλη γ ως την επιφάνεια $\Phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που δίδεται σε παραμετρική μορφή από τον τύπο

$$\Phi(u,v) = \gamma(u) + R(\vec{n}\,(u)\cos v + \vec{b}\,(u)\sin v),$$

όπου $\vec{n}\,(u)$ και $\vec{b}\,(u)$ το κύριο και το δευτερεύον κάθετο διάνυσμα τής γ (εδώ θεωρούμε τα σημεία τού χώρου $\Phi(u,v)$, $\gamma(u)$ ως διανύσματα). Επιβεβαιώστε ότι ο παραπάνω τύπος ικανοποιεί τίς συνθήκες για να ορίζει επιφάνεια σε παραμετρική μορφή. Ποιά η γεωμετρική ερμηνεία αυτής τής επιφάνειας;

Ασκηση 2. Έστω $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x > 0\}$ και $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε την επιφάνεια $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u,v) = (u,\ v,\ uf(\frac{v}{u}))$. Δείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο τής επιφάνειας σε κάθε σημείο της διέρχεται από το $(0,0,0)$.

Ασκηση 3. Έστω $U = \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Θεωρούμε την επιφάνεια $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ \ln\cos v + u)$. Εστω $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ και $\alpha_{a_i} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow U$ οι καμπύλες με τύπο $\alpha_{a_i}(t) = (a_i, t)$. Για κάθε $b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ορίζουμε την καμπύλη $\beta_b : \mathbb{R} \longrightarrow U$ με $\beta_b(t) = (t, b)$. Δείξτε ότι οι καμπύλες $\Phi \circ \alpha_{a_1}$ και $\Phi \circ \alpha_{a_1}$ αποκόπτουν σε κάθε καμπύλη $\Phi \circ \beta_b$, $b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ένα κομμάτι σταθερού πάντα μήκους, δηλ. ανεξάρτητο τής επιλογής τού b.

Ασκηση 4. Έστω $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ καμπύλη, παραμετρημένη ως προς μήκος τόξου, με καμπυλότητα $\kappa(t) \neq 0$, $\forall t \in (a,b)$. Έστω $U = (a,b) \times (\mathbb{R} - \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε την επιφάνεια $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ από τον τύπο $\Phi(u,v) = \gamma(u) + v\ \dot{\gamma}\ (u)$. Επιβεβαιώστε ότι ο παραπάνω τύπος ικανοποιεί τίς συνθήκες για να ορίζει επιφάνεια σε παραμετρική μορφή. Ποιά η γεωμετρική ερμηνεία αυτής τής επιφάνειας; Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο της.