ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2013-14
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #5

Ασκηση 1. Αποδείξτε ότι αν η καμπύλη γ τής άσκησης 1 τού φυλλαδίου 4 έχει μήκος L τότε το εμβαδόν τής επιφάνειας που ορίζεται στην παραπάνω άσκηση, ισούται με $2\pi RL$.

Ασκηση 2. Έστω $f : (1,2) \longrightarrow R$ συνάρτηση με $z = f(x)$. Περιστρέφουμε το γράφημα τής f, το οποίο βρίσκεται στο zx-επίπεδο, γύρω από τον z-άξονα. Περιγράφετε την παραγόμενη επιφάνεια εκ περιστροφής με παραμετρικό τρόπο και δείξτε ότι είναι επιφάνεια σε παραμετρική μορφή. Οταν $z = x^2$ βρείτε το εμβαδόν τής 'ζώνησ' μεταξύ των επιπέδων $z = f(x_1)$και $z = f(x_2)$, όπου $1 < x_1 < x_2 < 2$.

Ασκηση 3. Ο κύκλος στο xz-επίπεδο του χώρου, με κέντρο το σημείο $(2,0,0)$ και ακτίνα 1 περιγράφεται από την $\alpha(u) = (2 + \cos u, \sin u)$. Οταν περιστρέψουμε τον παραπάνω κύκλο γύρω από τον z-άξονα παράγουμε μια επιφάνεια (έναν τόρο) που δίδεται σε παραμετρική μορφή από $\Phi(u,v) = ((2+\cos u)\cos v,\ (2+\cos u)\sin v,\ \sin u)$. Βρείτε την γεωμετρική ερμηνεία των γωνιών $u,\ v$. Δείξτε ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει επιφάνεια και βρείτε το εμβαδόν της.

Ασκηση 4. Έστω $R, h > 0$ και έστω $U = \{(\theta, z), 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$. Θεωρούμε τον κύλινδρο που ορίζεται από την απεικόνιση $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ με $\Phi(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$. Δείξτε ότι οι εικόνες των δύο αξόνων $\theta = 0$ και $z = 0$ τέμνονται κάθετα στο σημείο $(R,0,0)$ τού κυλίνδρου. Ισχύει το ίδιο για τίς εικόνες τής διαγωνίου $z = \theta$ και τής αντιδιαγωνίου $z = -\theta$;