ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2013-14
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6

Ασκηση 1. Έστω O η αρχή τών αξόνων και P σημείο τού χώρου. Έστω $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$ διανύσματα τού χώρου γραμμικώς ανεξάρτητα. Τότε για τό επίπεδο που δίδεται από τό διάνυσμα θέσης $\vec{X}\ (u,v) = \vec{OP} + u\ \vec{w_1} + v\ \vec{w_2}$ βρείτε τήν πρώτη και τήν δεύτερη θεμελιώδη μορφή σε κάθε σημείο του.

Ασκηση 2. Θεωρούμε τον κύλινδρο $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)$, όπου $R > 0$.
α) Βρείτε τήν πρώτη και τήν δεύτερη θεμελιώδη μορφή σε κάθε σημείο του.
β) Οταν τμήσουμε τον κύλινδρο με ένα επίπεδο που περνά από το σημείο $P = (0, R, 0)$, σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με το xy-επίπεδο και περιέχει το διάνυσμα $< 1, 0, 0 >$, παίρνουμε μια έλλειψη. Βρείτε τήν καμπυλότητα τής έλλειψης στο σημείο P.

Ασκηση 3. Έστω S τό γράφημα τής συνάρτησης $f(x,y) = x^2 - y^2$. Υπολογίστε την καμπυλότητα τών κάθετων τομών.

Ασκηση 4. Έστω S τό γράφημα τής συνάρτησης $z = f(x,y)$. Βρείτε τήν 2η θεμελιώδη μορφή.

Ασκηση 5. Θεωρούμε μια καμπύλη α στο x,z-επίπεδο παραμετρησμένη ως προς μήκος τόξου. Έστω $\alpha(s) = (x(s), z(s))$. Υποθέτουμε ότι $x(s) > 0, \forall s$. Οταν περιστρέψουνε την α γύρω από τον z-άξονα παίρνουμε μια επιφάνεια S εκ περιστροφής.
α) Δείξτε ότι η S περιγράφεται σε παραμετρική μορφή από την $\Phi(s,\phi) = (x(s)\cos\phi,\ x(s)\sin\phi,\ z(s))$.
β) Βρείτε το κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο της.
γ) Βρείτε την 1η και 2η θεμελιώδη μορφή και τήν κάθετη καμπυλότητα σε κάθε σημείο της.

Ασκηση 6. Έστω $a, b, c > 0$. Θεωρούμε τήν επιφάνεια S που ορίζεται από τήν

$$\Phi(u,v) = (a\cos u\cos v, b\cos u\sin v, c\sin u)$$

α) Βρείτε την 1η και 2η θεμελιώδη μορφή και τήν κάθετη καμπυλότητα σε κάθε σημείο της.
β) Βρείτε την καμπυλότητα των οριζόντιων τομών, δηλ. των καμπύλων που παίρνουμε όταν τμήσουμε την S με τα επίπεδα $z = d$, όπου d μια σταθερά με $d < |c|$.

Ασκηση 7. Βρείτε τις κύριες καμπυλότητες και τα κύρια διανύσματα σε κάθε σημείο τού γραφήματος τής συνάρτησης $z = xy$.