

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2013-14
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 7

Άσκηση 1. Εστω S το γράφημα συνάρτησης $z = f(x, y)$, δηλ. $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Εστω $P = \Phi(a, b)$.

α) Δείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss στο P είναι μηδέν εάν και μόνον εάν

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a, b)^2.$$

β) Δείξτε ότι η μέση καμπυλότητα στο P είναι μηδέν εάν και μόνον εάν

$$\left(1 + \frac{\partial f}{\partial u}(a, b)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a, b) - 2 \frac{\partial f}{\partial u}(a, b) \frac{\partial f}{\partial v}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a, b) + \left(1 + \frac{\partial f}{\partial v}(a, b)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a, b) = 0.$$

Άσκηση 2. Εστω S η επιφάνεια που δίδεται από την $\Phi(u, v) = (u, v, \log \cos v - \log \cos u)$.

α) Βρείτε την καμπυλότητα Gauss στο σημείο της $P = \Phi(0, 0)$.

β) Δείξτε ότι η μέση καμπυλότητα είναι μηδέν σε κάθε σημείο της S .

Άσκηση 3. Εστω S ο τόρος της άσκησης 3, φυλλάδιο 5.

α) Δείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss στο σημείο $P = \Phi(u, v)$ είναι ίση με $K = \frac{\cos u}{2 + \cos u}$.

β) Δείξτε ότι η S έχει σημεία που είναι ελλειπτικά, σαγματικά και παραβολικά.

γ) Σε κάθε ένα από τα σημεία του ερωτήματος β), βρείτε τις κύριες καμπυλότητες και τα κύρια διανύσματα.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι η επιφάνεια της άσκησης 4, φυλλάδιο 4, έχει σε κάθε σημείο της καμπυλότητα Gauss ίση με το μηδέν.

Άσκηση 5. Εστω $\alpha(s) = (e^{-s^2/2}, s)$, $s > 0$ επίπεδη καμπύλη στο xz -επίπεδο και έστω S η επιφάνεια εκ περιστροφής που παίρνουμε όταν περιστρέψουμε την καμπύλη α γύρω από τον z -άξονα. Βρείτε τις κύριες καμπύλες της παραπάνω επιφάνειας.

Άσκηση 6. Εστω S_1, S_2 επιφάνειες και έστω α καμπύλη που ορίζεται ως η τομή των επιφανειών S_1, S_2 . Υποθέτουμε ότι τα κάθετα διανύσματα των S_1, S_2 σχηματίζουν σταθερή γωνία κατά μήκος των σημείων της α . Δείξτε ότι η α είναι κύρια καμπύλη της επιφάνειας S_1 αν και μόνον αν είναι κύρια καμπύλη της επιφάνειας S_2 .