Θεωρία Σωμάτων - Εαρινό εξάμηνο 2008-09
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. Βρείτε το αντίστροφο κάθε στοιχείου στο σώμα $\mathbb{Z}_{11}$.

Πρόβλημα 2. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία στον δαντύλιο $\mathbb{Z}_{10}$ και γράψτε τα αντίστροφά τους.

Πρόβλημα 3. Έστω K ένα σώμα. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $K[x]$ περιέχει άπειρο πλήθος αναγώγων πολυωνύμων.

Πρόβλημα 4. **α)** Βρείτε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 2 στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2[x]$.
β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ είναι ανάγωγο.

Πρόβλημα 5. **α)** Δείξτε ότι το $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ είναι αλγεβρικό $|\mathbb{Q}$ και βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμό του $\mathrm{Irr}(\sqrt{5}, \mathbb{Q})$.
β) Δείξτε ότι το $-1 + \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ είναι αλγεβρικό $|\mathbb{Q}$ και βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμό του $\mathrm{Irr}(-1 + \sqrt{5}, \mathbb{Q})$.

Πρόβλημα 6. Έστω $F \leq K \leq L$ και $a \in L$.
α) Δείξτε ότι αν a είναι αλγεβρικό $|F$ τότε είναι και αλγεβρικό $|K$.
β) Ποιά είναι η σχέση τού $\mathrm{Irr}(a, F)$ με το $\mathrm{Irr}(a, K)$;

Πρόβλημα 7. **α)** Έστω p πρώτος και έστω $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ με $p \nmid a_n$. Ορίζουμε ως $\overline{f(x)} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \cdots + \bar{a}_n x^n \in \mathbb{Z}_p[x]$. Δείξτε ότι αν το $\overline{f(x)}$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_p[x]$ τότε το $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$.
β) Δείξτε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα τού $\mathbb{Z}[x]$ είναι ανάγωγα:
$x^3 + 2x + 1$
$x^5 + x - 1$.