

Θεωρία Σωμάτων - Εαρινό εξάμηνο 2008-09
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 2

Πρόβλημα 1. Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων με $[E : K] = p$ πρώτος αριθμός.

α) Δείξτε ότι αν M σώμα με $K \leq M \leq E$ τότε $M = K$ ή $M = E$.

β) Δείξτε ότι $E = K[a]$ για κάποιο $a \in E$.

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Q}[\sqrt{1+\sqrt{3}}]$ είναι σώμα και βρείτε την διάστασή του ως διανυσματικού χώρου $|\mathbb{Q}$.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^n + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο αν και μόνον αν $n = 2^k$ για κάποιο ακέραιο $k \geq 0$.

Πρόβλημα 4. α) Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $a \neq \pm b$ και $a^2, b^2 \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $\mathbb{Q}(a, b) = \mathbb{Q}(a + b)$.

β) Βρείτε τον βαθμό $[\mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{7}] : \mathbb{Q}]$.

Πρόβλημα 5. α) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + 2x + 2$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}[x]$.

β) Ως πολυώνυμο περιτού βαθμού έχει μια πραγματική ρίζα, έστω a . Εκφράστε το $\frac{1}{1-a}$ ως στοιχείο τού $\mathbb{Q}[a]$.

Πρόβλημα 6. Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων και $a \in E$. Έστω $f(x) \in K[x]$ ένα μή σταθερό πολυώνυμο. Θέτουμε $b = f(a)$. Έχουμε ότι $K \leq K(b) \leq E$. Δείξτε ότι το a είναι αλγεβρικό πάνω από το σώμα $K(b)$.

Πρόβλημα 7. Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων και $a \in E$ αλγεβρικό στοιχείο πάνω από το K . Υποθέτουμε ότι το $\text{Irr}(a, K)$ είναι περιτού βαθμού. Δείξτε ότι $K(a) = K(a^2)$. Ισχύει το ίδιο όταν ο βαθμός είναι άρτιος;