

**Θεωρία Σωμάτων - Εαρινό εξάμηνο 2008-09**  
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3**

**Πρόβλημα 1.** Έστω  $K \leq E$  μια πεπερασμένη επέκταση σωμάτων. Έστω  $f(x) \in K[x]$  ένα ανάγωγο πολυώνυμο με  $\deg f(x) \nmid [E : K]$ . Δείξτε ότι το  $f(x)$  δεν έχει ρίζες στο σώμα  $E$ .

**Πρόβλημα 2.** Δείξτε ότι η γωνία των  $30^0$  (και επομένως και το κανονικό 12-γωνο) είναι κατασκευάσιμη γωνία.

**Πρόβλημα 3.** Δείξτε ότι το κανονικό 9-γωνο δεν είναι κατασκευάσιμο.

**Πρόβλημα 4.** Δείξτε ότι η γωνία των  $36^0$  (και επομένως και το κανονικό 10-γωνο) είναι κατασκευάσιμη γωνία (δείτε την άσκηση # 4 τής παραγράφου & 7.5 από το βιβλίο του Fraleigh).

**Πρόβλημα 5.** Έστω  $K \leq E$  μια αλγεβρική επέκταση σωμάτων. Έστω  $R$  δακτύλιος με  $K \subseteq R \subseteq E$ . Δείξτε ότι ο  $R$  είναι σώμα. Ισχύει το ίδιο αν η επέκταση δεν είναι αλγεβρική;

**Πρόβλημα 6.** Έστω  $n \in \mathbb{N}$ . Συμβολίζουμε ως  $2^{1/n}$  την μοναδική πραγματική θετική ρίζα τής εξίσωσης  $x^n - 2 = 0$  και έστω  $A_n = \mathbb{Q}(2^{1/n})$ .

α) Υπολογίστε τον βαθμό τής επέκτασης  $\mathbb{Q} \leq A_n$ .

β) Αν  $m, n \in \mathbb{N}$  με  $m \mid n$  δείξτε ότι  $A_m \leq A_n$  και υπολογίστε τον βαθμό  $[A_n : A_m]$ .

γ) Αν  $(m, n) = 1$  δείξτε ότι  $A_{mn} = \mathbb{Q}(2^{1/m}, 2^{1/n})$ .

**Πρόβλημα 7.** Έστω  $a, b$  στοιχεία κάποιου σώματος  $K$  και έστω ότι το  $a$  είναι το τετράγωνο κάποιου στοιχείου στο σώμα  $K(\sqrt{b})$ . Δείξτε τότε ότι είτε το  $a$  είτε το  $ab$  είναι το τετράγωνο κάποιου στοιχείου στο  $K$ .