Θεωρία Σωμάτων - Εαρινό εξάμηνο 2008-09
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4

Πρόβλημα 1. Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης E τού $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ και βρείτε τον βαθμό $[E : \mathbb{Q}]$.

Πρόβλημα 2. Έστω $K \leq L$ μια αλγεβρική επέκταση σωμάτων. Έστω $\bar{L}$ μια αλγεβρική θήκη τού L. Δείξτε τότε ότι $\bar{L}$ είναι, επίσης, μια αλγεβρική θήκη τού K, δηλ. $\bar{L} = \bar{K}$.

Πρόβλημα 3. Έστω $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Έστω $E \subseteq \mathbb{C}$ το σώμα ριζών του και έστω $\xi \in E$ μια ρίζα τού $f(x)$.
α) Δείξτε ότι και το $\xi^2 - 2 \in E$ είναι, επίσης, ρίζα τού $f(x)$.
β) Βρείτε ποιά είναι η τρίτη ρίζα τού $f(x)$, ως έκφραση τής ξ.
γ) Βρείτε τον βαθμό τής επέκτασης $[E : \mathbb{Q}]$.

Πρόβλημα 4. Έστω $f(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ και έστω $E \subseteq \mathbb{C}$ το σώμα ριζών του.
α) Δείξτε ότι το $f(x)$ είναι ανάγωγο και ότι έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα ξ.
β) Έστω ρ μια μιγαδική ρίζα τού $f(x)$. Δείξτε ότι $[\mathbb{Q}(\xi, \rho) : \mathbb{Q}] = 6$.
γ) Δείξτε ότι $E = \mathbb{Q}(\xi, \rho)$.

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα πρέπει να έχει άπειρα το πλήθος στοιχεία. Επομένως, τα σώματα $\mathbb{Z}_p$, p =πρώτος αριθμός, δεν είναι αλγεβρικά κλειστά σώματα.

Πρόβλημα 6. Έστω $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$.
α) Δείξτε ότι το $f(x)$ είναι ανάγωγο.
β) Έστω ξ μια ρίζα τού $f(x)$ σε μια επέκταση τού $\mathbb{Z}_5$. Δείξτε ότι το $E = \mathbb{Z}_5(\xi)$ είναι ένα σώμα ριζών τού $f(x)$.
γ) Δείξτε ότι το E έχει 25 στοιχεία και γράψτε τα ως πολυωνυμικές εκφράσεις τού ξ με συντελεστές στο $\mathbb{Z}_5$.