

Θεωρία Σωμάτων - Εαρινό εξάμηνο 2008-09
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Πρόβλημα 1. Βρείτε όλες τις εμβυθίσεις $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \hookrightarrow \mathbb{C}$ με $\sigma|_{\mathbb{Q}} = \text{ταυτότητα}$ (δηλ. σ είναι μια επέκταση τής ταυτοτικής εμβύθισης $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$).

Πρόβλημα 2. Βρείτε όλες τις εμβυθίσεις $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}$ με $\sigma|_{\mathbb{Q}} = \text{ταυτότητα}$ (δηλ. σ είναι μια επέκταση τής ταυτοτικής εμβύθισης $\mathbb{Q} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}$).

Πρόβλημα 3. Βρείτε όλους τους \mathbb{Q} -αυτομορφισμούς $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Πρόβλημα 4. Έστω p ένας πρώτος αριθμός και $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$. Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης E τού $f(x)$ και βρείτε τον βαθμό $[E : \mathbb{Q}]$.

Πρόβλημα 5. α) Έστω $f(x) \in K[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο τού $K[x]$ βαθμού n . Έστω $K \leq F$ επέκταση σωμάτων με $[F : K] = m$. Αν $(n, m) = 1$ δείξτε ότι το $f(x)$ παραμένει ανάγωγο και ως πολυώνυμο τού $F[x]$.

β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^5 - 9x^3 + 15x + 6$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})[x]$.