

**Θεωρία Σωμάτων - Εαρινό εξάμηνο 2008-09**  
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 6**

**Πρόβλημα 1.** Έστω  $K \leq F$  επέκταση σωμάτων με  $[F : K] = 2$ . Δείξτε ότι η επέκταση είναι κανονική.

**Πρόβλημα 2.** Έστω  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  πολυώνυμο περιττού βαθμού  $\geq 3$  το οποίο έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα  $a \in \mathbb{Q}$ . Δείξτε ότι η επέκταση  $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(a)$  δεν είναι κανονική.

**Πρόβλημα 3.** Έστω  $K \leq M \leq E$  επεκτάσεις σωμάτων με  $K \leq E$  διαχωρίσιμη. Δείξτε ότι οι επεκτάσεις  $K \leq M$  και  $M \leq E$  είναι διαχωρίσιμες.

**Πρόβλημα 4.** Έστω  $a \in \mathbb{R}$  με  $a^4 = 5$ . Δείξτε ότι:

- α) Το  $\mathbb{Q}(ia^2)$  είναι κανονική επέκταση τού  $\mathbb{Q}$ .
- β) Το  $\mathbb{Q}(a + ia)$  είναι κανονική επέκταση τού  $\mathbb{Q}(ia^2)$ .
- γ) Το  $\mathbb{Q}(a + ia)$  δεν είναι κανονική επέκταση τού  $\mathbb{Q}$ .

**Πρόβλημα 5.** Δείξτε ότι η επέκταση  $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  είναι κανονική επέκταση.

**Πρόβλημα 6.** α) Έστω  $K \leq E$  επέκταση σωμάτων. Δείξτε ότι τα  $K$  και  $E$  έχουν την ίδια χαρακτηριστική.

β) Έστω  $\mathbb{Z}_p \leq E$  επέκταση σωμάτων και  $a \in E$ . Δείξτε ότι  $(x - a)^p = x^p - a^p$ .

γ) Δείξτε ότι αν  $a \notin \mathbb{Z}_p(a^p)$  τότε η επέκταση  $\mathbb{Z}_p(a^p) \leq E$  δεν είναι διαχωρίσιμη.