**Θεωρία Σωμάτων - Εαρινό εξάμηνο 2008-09**
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ #7**

**Πρόβλημα 1.** Για κάθε μια από τις παρακάτω επεκτάσεις $\mathbb{Q} \leq E$, υλοποιήστε την αντιστοιχία Galois. Δηλαδή, βρείτε την ομάδα Galois $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, βρείτε όλες τις υποομάδες $H$ τής $G$ και κατατάξτε της ανάλογα με την τάξη τους, βρείτε τις αντίστοιχες ενδιάμεσες επεκτάσεις $\mathbb{Q} \leq L \leq E$ και κατατάξτε της ανάλογα με τον βαθμό τους $[L : \mathbb{Q}]$, βρείτε ποιές από τις επεκτάσεις $\mathbb{Q} \leq L$ είναι Galois και ποιές υποομάδες $H$ τής $G$ είναι κανονικές.
**α)** $E$ είναι το σώμα ανάλυσης τού $f(x) = x^5 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.
**β)** $E$ είναι το σώμα ανάλυσης τού $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 5) \in \mathbb{Q}[x]$.
**γ)** $E$ είναι το σώμα ανάλυσης τού $f(x) = x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

**Πρόβλημα 2.** Έστω $E$ το σώμα ανάλυσης τού $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Βρείτε έναν μιγαδικό $a$ έτσι ώστε $E = \mathbb{Q}(a)$.

**Πρόβλημα 3.** Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο και $E$ τό σώμα ανάλυσής του στο $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι το $f(x)$ έχει μία ρίζα στο $\mathbb{C}$ που δεν είναι στο $\mathbb{R}$. Έστω $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\sigma(z) = \bar{z}$ (συζυγία μιγαδικών αριθμών). Δείξτε ότι η $\sigma$ επάγει ένα στοιχείο τής $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ (δηλ. ο περιορισμός τής $\sigma$ στο $E$ ορίζει ένα στοιχείο τής $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$). Βρείτε το αντίστοιχο ενδιάμεσο σώμα $\mathbb{Q} \leq L \leq E$ τής κυκλικής υποομάδας $< \sigma > \leq \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ και τον βαθμό τής επέκτασης $[L : \mathbb{Q}]$.

**Πρόβλημα 4.** Έστω $K \leq K(a)$ ($a \notin K$) επέκταση Galois. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\sigma \in \mathrm{Gal}(K(a)/K)$ με $\sigma(a) = a^{-1}$. Δείξτε τότε ότι $[K(a) : K]$ είναι άρτιος αριθμός και $[K(a + a^{-1}) : K] = \frac{1}{2}\,[K(a) : K]$.

**Πρόβλημα 5.** Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο με σώμα ανάλυσης $E$ και έστω ότι η ομάδα $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ είναι αβελιανή. Δείξτε ότι αν $a$ είναι μια οποιαδήποτε ρίζα τού $f(x)$ τότε $E = \mathbb{Q}(a)$. (Υπόδειξη: αντιστοιχία κανονικών υποομάδων και ενδιάμεσων επεκτάσεων Galois).

**Πρόβλημα 6.** Έστω $f(x) = x^4 + 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ και $E$ το σώμα ανάλυσής του. Δείξτε ότι η ομάδα Galois $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ έχει τάξη 4 και βρείτε με ποιά ακριβώς ομάδα τάξης 4 είναι ισόμορφη.