

## ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4

**Άσκηση 1.** Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μία λύση στα δοσμένα διαστήματα:

α)  $x^4 + 3x + 1 = 0$  στο διάστημα  $[-2, -1]$ .

β)  $2x^3 - 3x^2 - 12x - 6 = 0$  στο διάστημα  $[-1, 0]$ .

**Άσκηση 2.** Βρείτε τον αριθμό  $c$  ο οποίος αναφέρεται στον τύπο τού θεωρήματος της μέσης τιμής  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

α)  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  με  $[a, b] = [0, 1]$ .

β)  $f(x) = \sqrt{x-1}$  με  $[a, b] = [1, 3]$ .

**Άσκηση 3.** Έστω ότι οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο διάστημα  $[a, b]$  και παραγωγίσιμες στο  $(a, b)$ . Αν  $f(a) = g(a)$  και  $f(b) = g(b)$  δείξτε ότι υπάρχει ένα σημείο  $c \in (a, b)$  με την ιδιότητα ότι η εφαπτόμενη στο γράφημα τής  $f$  στο σημείο  $(c, f(c))$  να είναι παράλληλη με την εφαπτόμενη στο γράφημα τής  $g$  στο σημείο  $(c, g(c))$ .

**Άσκηση 4.** Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor βαθμού  $n = 5$ , κέντρου 0, για τις παρακάτω συναρτήσεις:

α)  $f(x) = e^x$ ,

β)  $f(x) = \cos x$ ,

γ)  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ ,

δ)  $f(x) = x^3 + 2x + 1$ ,

ε)  $f(x) = x^6 + 3x^4 + x - 1$ .

**Άσκηση 5.** Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Taylor για να υπολογίσετε το  $\sqrt{1,02}$  με σφάλμα μικρότερο του  $10^{-2}$ .

**Άσκηση 6.** Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Taylor για να υπολογίσετε το  $e^{0.1}$  με σφάλμα μικρότερο του  $10^{-5}$ .

**Άσκηση 7.** Γράψτε το πολυώνυμο  $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 1$  ως ένα πολυώνυμο σε δυνάμεις τού  $(x + 2)$ .

**Άσκηση 8.** Βρείτε τα παρακάτω όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2x - \pi}{\cos x}$

β)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$

γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x + 7\sqrt{x}}$

δ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$

ε)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

$$\vartheta) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$$

$$\iota) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$$