

## ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

**Άσκηση 1.** Σχεδιάστε το γράφημα των παρακάτω συναρτήσεων και βρείτε τοπικά ακρότατα, ολικά ακρότατα, σημεία καμπής, οριζόντιες και κάθετες ασύμπτωτες.

α)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2, x \in \mathbb{R}$ .

β)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}, x \in \mathbb{R}$ .

γ)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & \text{αν } x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & \text{αν } x > 1. \end{cases}$$

δ)  $x^2\sqrt{9-x^2}, x \in [-3, 3]$ .

ε)  $|x - x^2|, x \in [-2, 2]$ .

**Άσκηση 2.** Μια μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $(1, 2)$  τέμνει τον  $x$ -άξονα στο σημείο  $A(a, 0)$  με  $a > 0$  και τον  $y$ -άξονα στο σημείο  $B(0, b)$  με  $b > 0$ . Έστω  $O$  η αρχή των αξόνων. Βρείτε για ποιές τιμές των  $a, b$  το τρίγωνο  $AOB$  έχει ελάχιστο εμβαδόν.

**Άσκηση 3.** Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δοχείο με όγκο  $1000 \text{ cm}^3$  και με σχήμα κυλίνδρου, χωρίς καπάκι, με ένα υλικό που ζυγίζει  $1 \text{ gr/cm}^2$ . Ποιές είναι οι διαστάσεις τού ελαφρότερου δοχείου;

**Άσκηση 4.** Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνεται με αέριο με ρυθμό  $10 \text{ cm}^3/\text{sec}$ . Πόσο γρήγορα αυξάνεται η ακτίνα τού μπαλονιού όταν το μήκος της είναι  $30 \text{ cm}$ ;

**Άσκηση 5.** Ένα σημείο κινείται στην καμπύλη  $3x^2 - y^2 = 12$  έτσι ώστε η  $y$ -συντεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό  $6 \text{ m/sec}$ . Με ποιό ρυθμό αλλάζει η  $x$ -συντεταγμένη του όταν το  $x = 4 \text{ m}$ ;

**Άσκηση 6.** Ένα τρίγωνο εγγεγραμμένο σε ένα κύκλο έχει ως βάση του την οριζόντια διάμετρο τού κύκλου. Δείξτε ότι το τρίγωνο έχει μέγιστο εμβαδόν όταν είναι ισοσκελές.

**Άσκηση 7.** Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $[0, 1]$ .

**Άσκηση 8.** Με χρήση τού θεωρήματος τής μέσης τιμής δείξτε ότι

$$|\sin b - \sin a| < |b - a|.$$

**Άσκηση 9.** Υπολογίστε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

α)  $\int x\sqrt{2x^2 - 1} dx$ .

β)  $\int x(x^2 + 1)^{2/3} dx$ .

γ)  $\int x(x^2 + 8)^{100} dx$ .

$$\delta) \int \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx .$$

$$\epsilon) \int (5x^4 + 2)\sqrt{x^2 + 2x} dx .$$

$$\sigma\tau) \int \cos^2 5x \sin 5x dx .$$

$$\zeta) \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx .$$

$$\eta) \int x^4(6 - x^5)^3 dx .$$

$$\vartheta) \int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})^2}} dx .$$

$$\iota) \int \frac{1}{y^2-2y+1} dx .$$

$$\kappa) \int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx .$$

$$\lambda) \int \frac{1}{x^2} \cos^2(1/x) dx .$$

$$\mu) \int \frac{2 \cos x}{1+\sin x)^4} dx .$$