

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 1

Στις παρακάτω ασκήσεις χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό: για έναν πραγματικό αριθμό a συμβολίζουμε ως $[a]$ το ακέραιο μέρος του, δηλ. τον μεγαλύτερο ακέραιο $m \in \mathbb{Z}$ με την ιδιότητα $m \leq a$.

Άσκηση 1. Βρείτε το πεδίο ορισμού και το αντίστοιχο πεδίο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x+4}$

β) $f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$

γ) $f(x) = \sqrt{1+\cos 2x}$

δ) $f(x) = \tan(x/2)$

Άσκηση 2. Βρείτε τα παρακάτω όρια, αν υπάρχουν

α)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^2 - 9}$$

β)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{x^2-9}$$

γ)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]^2 - 9}{x^2 - 9}$$

γ)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) \left(\frac{5x^2 - 1}{x^2}\right)$$

δ)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \cos \frac{1}{x}\right)$$

ε)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1}$$

στ)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

ζ)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{x^3 + x^2 + 2}$$

η)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x} + x^2 - 1}$$

Άσκηση 3. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια συναρτήσεων (εάν υπάρχουν):

α)

$$\lim_{x \rightarrow 1} x(x-2)(x^3+5)$$

β)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^3+1}$$

γ)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$$

δ)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x[x]$$

ε)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-5x+4}$$

στ)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{[x]}$$

ζ)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$$

η)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$$

Άσκηση 4. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία πραγματική λύση (δηλ. μια λύση στο \mathbb{R}).

α) $\cos x = x$

β) $x(x-1)^2 = 1$

γ) $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$

δ) $2 \sin x - x = 0$

Άσκηση 5. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + x, & \text{αν } x \geq 0 \\ [x+2], & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Είναι η $f(x)$ συνεχής στο $x = 0$;

Άσκηση 6. Ποιά τιμή πρέπει να δώσουμε στο a ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x = 3$;

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{αν } x < 3 \\ 2ax, & \text{αν } x \geq 3. \end{cases}$$

Άσκηση 7. Ποιά τιμή πρέπει να δώσουμε στο a ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x = 4$;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{|x-4|}, & \text{αν } x \neq 4 \\ a, & \text{αν } x = 4. \end{cases}$$