

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 2

Άσκηση 1. α) Βρείτε την κλίση τής ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A = (1, 2)$ και $B = (3, 9)$.

β) Βρείτε την κλίση τής ευθείας που είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A = (1, 4)$ και $B = (2, 3)$.

γ) Έστω $A = (3, 1)$, $B = (2, 2)$, $C = (0, 1)$, $D = (1, 0)$. Είναι το τετράπλευρο $ABCD$ παραλληλόγραμμο;

Άσκηση 2. α) Βρείτε την εξίσωση τής ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία που δίδεται από την εξίσωση $3x + 5y = 2$.

β) Βρείτε την απόσταση του σημείου $(0, 0)$ από την παραπάνω ευθεία.

γ) Βρείτε την εξίσωση τής ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία που δίδεται από την εξίσωση $4x + 2y = 1$.

Άσκηση 3. Έστω e_1 η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(1, 0)$, $(0, 2)$ και e_2 η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(3, 4)$, $(4, 2)$.

α) Δείξτε ότι οι παραπάνω ευθείες είναι παράλληλες.

β) Βρείτε την μεταξύ τους απόσταση.

Άσκηση 4. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + x, & \text{αν } x \geq 0 \\ [x + 2], & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $x = 0$;

Άσκηση 5. Σε ποίο σημείο του γραφήματος τής συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ η εφαπτόμενη έχει κλίση $\frac{1}{4}$;

Άσκηση 6. Σε ποίο σημείο του γραφήματος τής συνάρτησης $f(x) = x^3$ η εφαπτόμενη τέμνει τον x -άξονα στο σημείο $(1, 0)$;

Άσκηση 7. Βρείτε πόσες εφαπτόμενες του γραφήματος τής συνάρτησης $y = x^2$ διέρχονται από το σημείο $(1, 4)$. Γράψτε τις εξισώσεις τους.

Άσκηση 8. Βρείτε τις εφαπτόμενες στην καμπύλη $y = x^3 + x$ των οποίων η κλίση είναι ίση με 4. Σε ποίο σημείο τής καμπύλης η κλίση τής εφαπτόμενης έχει την ελάχιστη τιμή;

Άσκηση 9. Βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ όπου

α) $y = (x - 1)(x^2 + 1)^{-2}$

β) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

γ) $y = \ln(x^3 + 1)$

δ) $y = \cos(\sqrt{x^2 + 1})$

ε) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

στ) $y = 5^{x^2+1}$

$$\zeta) y = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$$

$$\eta) y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

$$\theta) y = e^{\sin x}$$

$$\iota) y = \left(\frac{\sin u}{1 + \cos u} \right)^2$$

Άσκηση 10. Βρείτε την δεύτερη παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2}$ όπου

$$\alpha) y = \cos(\sin x)$$

$$\beta) y = \frac{\ln x}{x}$$

Άσκηση 11. Δίδεται ο τύπος τού γεωμετρικού αθροίσματος:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Παραγωγίζοντας βρείτε τύπους για τα αθροίσματα:

$$\alpha) 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

$$\beta) x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + n^2x^n.$$