

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3

Άσκηση 1. Βρείτε τις κλίσεις των εφαπτόμενων των παρακάτω καμπυλών στα σημεία που δίδονται

α) $(x + y)^3 + (x + y)^4 = x^2 + y^2 + 22$ στο σημείο $(1, 1)$.

β) $x^2y^2 + 1 = x^2 + y^2$ στο σημείο $(2, 1)$.

γ) $3x^2 + xy + y^2 = 9$ στο σημείο $(1, 2)$.

δ) $x^2 + xy - y^2 = 1$ στο σημείο $(2, 3)$.

ε) $x \sin(2y) = y \cos(2x)$ στο σημείο $(\pi/4, \pi/2)$.

Άσκηση 2. Βρείτε το $\frac{dy}{dx}$ στην περίπτωση που τα y, x ικανοποιούν την εξίσωση:

α) $\sin(xy) = 1$

β) $2\sqrt{y} = x + y$

γ) $\cos x + \sin y = xy$

Άσκηση 3. Βρείτε τους παρακάτω αριθμούς:

α) $\sin(\cos^{-1} 0.3)$

β) $\sin(\tan^{-1} \sqrt{5})$

γ) $\tan(\cos^{-1} 1/3)$

δ) $\cos(\tan^{-1} \sqrt{2})$

ε) $\cot(\tan^{-1} \sqrt{3})$

Άσκηση 4. Βρείτε την παράγωγο τής $y(x) = \tan^{-1}(x^2 + 1)$.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μία λύση στα δοσμένα διαστήματα:

α) $x^4 + 3x + 1 = 0$ στο διάστημα $[-2, -1]$.

β) $2x^3 - 3x^2 - 12x - 6 = 0$ στο διάστημα $[-1, 0]$.

Άσκηση 6. Να βρεθούν τα σημεία τομής τής καμπύλης $x^2 + xy + y^2 = 7$ με τον x -άξονα και να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες τής καμπύλης σε αυτά τα σημεία είναι παράλληλες.

Άσκηση 7. Βρείτε τον αριθμό c ο οποίος αναφέρεται στον τύπο τού θεωρήματος τής μέσης τιμής $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ με $[a, b] = [0, 1]$.

β) $f(x) = \sqrt{x-1}$ με $[a, b] = [1, 3]$.

Άσκηση 8. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b) . Αν $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$ δείξτε ότι υπάρχει ένα σημείο $c \in (a, b)$ με την ιδιότητα ότι η εφαπτόμενη στο γράφημα τής f στο σημείο $(c, f(c))$ να είναι παράλληλη με την εφαπτόμενη στο γράφημα τής g στο σημείο $(c, g(c))$.