

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4

Ασκηση 1. Σχεδιάστε το γράφημα των παρακάτω συναρτήσεων και βρείτε τοπικά ακρότατα, ολικά ακρότατα, σημεία καμπής, οριζόντιες και κάθετες ασύμπτωτες.

α) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2, x \in \mathbb{R}$.

β) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}, x \in \mathbb{R}$.

γ)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & \text{αν } x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & \text{αν } x > 1. \end{cases}$$

δ) $x^2\sqrt{9-x^2}, x \in [-3, 3]$.

ε) $|x - x^2|, x \in [-2, 2]$.

στ) $f(x) = e^{-x}x^2$, για $x \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$).

Ασκηση 2. Βρείτε την (απόλυτη) μέγιστη και ελάχιστη τιμή, και τα σημεία στα οποία αυτές λαμβάνονται, της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ με πεδίο ορισμού

α) το διάστημα $[0, 2]$,

β) το διάστημα $[2, 3]$.

Ασκηση 3. α) Με χρήση τού θεωρήματος της μέσης τιμής δείξτε ότι $|\sin b - \sin a| < |b - a|$.

β) Αν μία συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί $|f'(x)| \leq M$, $M =$ μία σταθερά, για κάθε x σε κάποιο διάστημα I , δείξτε ότι $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in I$.

Ασκηση 4. Μια μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ τέμνει τον x -άξονα στο σημείο $A(a, 0)$ με $a > 0$ και τον y -άξονα στο σημείο $B(0, b)$ με $b > 0$. Έστω O η αρχή των αξόνων. Βρείτε για ποιές τιμές των a, b το τρίγωνο AOB έχει ελάχιστο εμβαδόν.

Ασκηση 5. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δοχείο με όγκο 1000 cm^3 και με σχήμα κυλίνδρου, χωρίς καπάκι, με ένα υλικό που ζυγίζει 1 gr/cm^2 . Ποιές είναι οι διαστάσεις τού ελαφρότερου δοχείου;

Ασκηση 6. Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνεται με αέριο με ρυθμό $10 \text{ cm}^3/\text{sec}$. Πόσο γρήγορα αυξάνεται η ακτίνα τού μπαλονιού όταν το μήκος της είναι 30 cm ;

Ασκηση 7. Ένα σημείο κινείται στην καμπύλη $3x^2 - y^2 = 12$ έτσι ώστε η y -συντεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό 6 m/sec . Με ποίο ρυθμό αλλάζει η x -συντεταγμένη του όταν το $x = 4 \text{ m}$;

Ασκηση 8. Ένα τρίγωνο εγγεγραμμένο σε ένα κύκλο έχει ως βάση του την οριζόντια διάμετρο τού κύκλου. Δείξτε ότι το τρίγωνο έχει μέγιστο εμβαδόν όταν είναι ισοσκελές.