

## ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 6

**Άσκηση 1.** Βρείτε τον αριθμό  $c$  ο οποίος αναφέρεται στον τύπο τού θεωρήματος τής μέσης τιμής  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

α)  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  με  $[a, b] = [0, 1]$ .

β)  $f(x) = \sqrt{x-1}$  με  $[a, b] = [1, 3]$ .

**Άσκηση 2.** Έστω ότι οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο διάστημα  $[a, b]$  και παραγωγίσιμες στο  $(a, b)$ . Αν  $f(a) = g(a)$  και  $f(b) = g(b)$  δείξτε ότι υπάρχει ένα σημείο  $c \in (a, b)$  με την ιδιότητα ότι η εφαπτόμενη στο γράφημα τής  $f$  στο σημείο  $(c, f(c))$  να είναι παράλληλη με την εφαπτόμενη στο γράφημα τής  $g$  στο σημείο  $(c, g(c))$ .

**Άσκηση 3.** Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή τής συνάρτησης  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$  στα κάτωθι διαστήματα:

α)  $[0, 2]$ ,

β)  $[2, 3]$ .

**Άσκηση 4.** Σχεδιάστε το γράφημα των παρακάτω συναρτήσεων και βρείτε τοπικά ακρότατα, ολικά ακρότατα, σημεία καμπής, οριζόντιες και κάθετες ασύμπτωτες.

α)  $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

β)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

γ)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & \text{αν } x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & \text{αν } x > 1. \end{cases}$$

δ)  $x^2\sqrt{9-x^2}$ ,  $x \in [-3, 3]$ .

ε)  $|x-x^2|$ ,  $x \in [-2, 2]$ .

**Άσκηση 5.** Μια μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $(1, 2)$  τέμνει τον  $x$ -άξονα στο σημείο  $A(a, 0)$  με  $a > 0$  και τον  $y$ -άξονα στο σημείο  $B(0, b)$  με  $b > 0$ . Έστω  $O$  η αρχή των αξόνων. Βρείτε για ποιές τιμές των  $a, b$  το τρίγωνο  $AOB$  έχει ελάχιστο εμβαδόν.

**Άσκηση 6.** Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δοχείο με όγκο  $1000 \text{ cm}^3$  και με σχήμα κυλίνδρου, χωρίς καπάκι, με ένα υλικό που ζυγίζει  $1 \text{ gr/cm}^2$ . Ποιές είναι οι διαστάσεις τού ελαφρότερου δοχείου;

**Άσκηση 7.** Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνεται με αέριο με ρυθμό  $10 \text{ cm}^3/\text{sec}$ . Πόσο γρήγορα αυξάνεται η ακτίνα τού μπαλονιού όταν το μήκος της είναι  $30 \text{ cm}$ ;

**Άσκηση 8.** Ένα σημείο κινείται στην καμπύλη  $3x^2 - y^2 = 12$  έτσι ώστε η  $y$ -συντεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό  $6 \text{ m/sec}$ . Με ποιό ρυθμό αλλάζει η  $x$ -συντεταγμένη του όταν το  $x = 4 \text{ m}$ ;

**Άσκηση 9.** Ένα τρίγωνο εγγεγραμμένο σε ένα κύκλο έχει ως βάση του την

οριζόντια διάμετρο τού κύκλου. Δείξτε ότι το τρίγωνο έχει μέγιστο εμβαδόν όταν είναι ισοσκελές.

**Άσκηση 10.** Με χρήση τού θεωρήματος τής μέσης τιμής δείξτε ότι

$$|\sin b - \sin a| < |b - a|.$$