

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4

Άσκηση 1. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

β) $f(x) = \cos(\sqrt{x^2 + 1})$.

γ) $f(x) = \frac{1}{\tan x}$.

δ) $f(x) = \ln(2x^2 + 3)$.

ε) $f(x) = 5^{x^3+1}$.

στ) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

ζ) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

η) $f(x) = e^{\sin x}$.

θ) $f(x) = \cos^{-1}(\sqrt{x})$.

Άσκηση 2. Σε ποιό σημείο τού γραφήματος τής συνάρτησης $f(x) = x^3$ η εφαπτόμενη τέμνει τον x -άξονα στο σημείο $(1, 0)$;

Άσκηση 3. Να βρεθούν τα σημεία τού γραφήματος τής συνάρτησης $y = \tan x$ στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y + x = 0$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μία λύση στα δοσμένα διαστήματα:

α) $x^4 + 3x + 1 = 0$ στο διάστημα $[-2, -1]$.

β) $2x^3 - 3x^2 - 12x - 6 = 0$ στο διάστημα $[-1, 0]$.

Άσκηση 5. Βρείτε τις κλίσεις των παρακάτω καμπυλών στα σημεία που δίδονται

α) $(x + y)^3 + (x + y)^4 = x^2 + y^2 + 22$ στο σημείο $(1, 1)$.

β) $x^2y^2 + 1 = x^2 + y^2$ στο σημείο $(2, 1)$.

γ) $3x^2 + xy + y^2 = 9$ στο σημείο $(1, 2)$.

Άσκηση 6. Βρείτε το $\frac{dy}{dx}$ στην περίπτωση που τα x, y ικανοποιούν την εξίσωση:

α) $\sin(xy) = 1$

β) $2\sqrt{y} = x + y$

γ) $\cos x + \sin y = xy$

Άσκηση 7. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στό $x = 0$:

α) $f(x) = |\sin x|$

β) $f(x) = |x^2 \sin x|$.

Άσκηση 8. Βρείτε τον αριθμό c ο οποίος αναφέρεται στον τύπο τού θεωρήματος τής μέσης τιμής $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ με $[a, b] = [0, 1]$.

β) $f(x) = \sqrt{x-1}$ με $[a, b] = [1, 3]$.

Άσκηση 9. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b) . Αν $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$ δείξτε ότι υπάρχει ένα σημείο $c \in (a, b)$ με την ιδιότητα ότι η εφαπτόμενη στο γράφημα της f στο σημείο $(c, f(c))$ να είναι παράλληλη με την εφαπτόμενη στο γράφημα της g στο σημείο $(c, g(c))$.