

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Άσκηση 1. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ στα κάτωθι διαστήματα:

α) $[0, 2]$,

β) $[2, 3]$.

Άσκηση 2. Σχεδιάστε το γράφημα των παρακάτω συναρτήσεων και βρείτε τοπικά ακρότατα, ολικά ακρότατα, σημεία καμπής, οριζόντιες και κάθετες ασύμπτωτες.

α) $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

γ)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & \text{αν } x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & \text{αν } x > 1. \end{cases}$$

δ) $x^2\sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3, 3]$.

ε) $|x - x^2|$, $x \in [-2, 2]$.

Άσκηση 3. Μια μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ τέμνει τον x -άξονα στο σημείο $A(a, 0)$ με $a > 0$ και τον y -άξονα στο σημείο $B(0, b)$ με $b > 0$. Έστω O η αρχή των αξόνων. Βρείτε για ποιές τιμές των a, b το τρίγωνο AOB έχει ελάχιστο εμβαδόν.

Άσκηση 4. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δοχείο με όγκο 1000 cm^3 και με σχήμα κυλίνδρου, χωρίς καπάκι, με ένα υλικό που ζυγίζει 1 gr/cm^2 . Ποιές είναι οι διαστάσεις του ελαφρότερου δοχείου;

Άσκηση 5. Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνεται με αέριο με ρυθμό $10 \text{ cm}^3/\text{sec}$. Πόσο γρήγορα αυξάνεται η ακτίνα του μπαλονιού όταν το μήκος της είναι 30 cm ;

Άσκηση 6. Ένα σημείο κινείται στην καμπύλη $3x^2 - y^2 = 12$ έτσι ώστε η y -συντεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό 6 m/sec . Με ποιό ρυθμό αλλάζει η x -συντεταγμένη του όταν το $x = 4 \text{ m}$;

Άσκηση 7. Ένα τρίγωνο εγγεγραμμένο σε ένα κύκλο έχει ως βάση του την οριζόντια διάμετρο του κύκλου. Δείξτε ότι το τρίγωνο έχει μέγιστο εμβαδόν όταν είναι ισοσκελές.

Άσκηση 8. Με χρήση του θεωρήματος της μέσης τιμής δείξτε ότι

$$|\sin b - \sin a| < |b - a|.$$