

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 10

Ασκήσεις επανάληψης

Ασκηση 1. Βρείτε το σημείο που ισοροπεί (κέντρο μάζας) μεταλλική ράβδος μήκους 2 μέτρων που η πυκνότητά της σε ένα σημείο της P είναι ανάλογη της απόστασης του P από το μέσον της ράβδου, δηλ. αν η απόσταση του P από το μέσον της ράβδου είναι a τότε η πυκνότητα στο P ισούται προς ca , όπου c μια σταθερά.

Ασκηση 2. α) Βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται κάτω από την παραβολή $y = -x^2 + 4$ και πάνω από την ευθεία $y - x = 2$.

β) Βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2 - 1$ και $y = -x^2 + 1$.

Ασκηση 3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

α) $\int \ln(x^2 + x^3) dx$

β) $\int \frac{x+3}{x^3-4x} dx$

γ) $\int \frac{e^t}{e^{2t}+9} dt$

δ) $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2} dx$

ε) $\int \frac{1}{x^4-1} dx$

Ασκηση 4. Υπολογίστε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$.

β) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$.

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-2} e^{3x}$.

Ασκηση 5. Βρείτε το $\tan(\cos^{-1} 0.3)$

Ασκηση 6. Θεωρούμε την παρακάτω συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + 2 \sin x, & \text{αν } x < 0 \\ x^2 + 6x + b, & \text{αν } 0 \leq x \leq 2 \\ a^x + 1, & \text{αν } x > 2. \end{cases}$$

Επιλέξτε τα a, b (με το $a > 0$) έτσι ώστε η παραπάνω συνάρτηση να γίνει συνεχής.

Ασκηση 7. Δείξτε ότι η εξίσωση $\sqrt[3]{x} + 2x - 3 = 0$ έχει ακριβώς μία λύση (που μάλιστα είναι θετικός αριθμός).

Ασκηση 8. Δύο σωματίδια κινούνται πάνω στον άξονα και η θέση τους την χρονική στιγμή t δίδεται από τους τύπους $s_1(t) = \sin t$ και $s_2(t) = \sin(t + \frac{\pi}{3})$ αντίστοιχα. Ποιά είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ των σωματιδίων; Για ποιές χρονικές στιγμές t , με $0 \leq t \leq 2\pi$, η μεταξύ τους απόσταση μεταβάλλεται με μέγιστο ρυθμό;

Ασκηση 9. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της καμπύλης $x \sin(2y) - y \cos(2x) = 0$ στο σημείο $(\pi/4, \pi/2)$.