

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Άσκηση 1. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μία λύση (ρίζα) στα δοσμένα διαστήματα:

- α) $x^4 + 3x + 1 = 0$ στο διάστημα $[-2, -1]$.
- β) $2x^3 - 3x^2 + 12x + 6 = 0$ στο διάστημα $[-1, 0]$.
- γ) $(x + 1)3^{x+1} = 1$ στο διάστημα $[-1, 0]$

Άσκηση 2. Βρείτε την κλίση της εφαπτόμενης των παρακάτω καμπυλών στα σημεία που δίδονται

- α) $(x + y)^3 + (x + y)^4 = x^2 + y^2 + 22$ στο σημείο $(1, 1)$.
- β) $x^2y^2 + 1 = x^2 + y^2$ στο σημείο $(2, 1)$.
- γ) $3x^2 + xy + y^2 = 9$ στο σημείο $(1, 2)$.

Άσκηση 3. Βρείτε το $\frac{dy}{dx}$ στην περίπτωση που τα x, y ικανοποιούν την εξίσωση:

- α) $\sin(xy) = 1$.
- β) $2\sqrt{y} = x + y$.
- γ) $\cos x + \sin y = xy$.

Άσκηση 4. Έστω C η καμπύλη στο xy -επίπεδο που ορίζεται από την εξίσωση $x^2 - y^2 + 3x = 0$. Βρείτε το σημείο όπου η εφαπτόμενη ευθεία της C στο σημείο $P = (1, -2)$ τέμνει την ευθεία $x + y = 1$.

Άσκηση 5. Βρείτε τον αριθμό c ο οποίος αναφέρεται στον τύπο του θεωρήματος της μέσης τιμής $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ με $[a, b] = [0, 1]$.
- β) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ με $[a, b] = [1, 3]$.

Άσκηση 6. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ στα κάτωθι διαστήματα:

- α) $[0, 2]$,
- β) $[2, 3]$.

Άσκηση 7. Σχεδιάστε το γράφημα των παρακάτω συναρτήσεων και βρείτε τοπικά ακρότατα, ολικά ακρότατα, σημεία καμπής, οριζόντιες και κάθετες ασύμπτωτες.

α) $f(x) = (x - 1)^2(x + 2), x \in \mathbb{R}$.

β) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}, x \in \mathbb{R}$.

γ)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & \text{αν } x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & \text{αν } x > 1. \end{cases}$$

δ) $x^2\sqrt{9 - x^2}, x \in [-3, 3]$.

ε) $|x - x^2|, x \in [-2, 2]$.

Άσκηση 8. Με χρήση τού θεωρήματος τής μέσης τιμής δείξτε ότι

$$|\sin b - \sin a| < |b - a|.$$