

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 2

Άσκηση 1. Βρείτε το διάνυσμα τής ταχύτητας και τής επιτάχυνσης στον χρόνο $t = 1$ τής κίνησης που δίδεται από την διανυσματική συνάρτηση (διάνυσμα θέσης)

$$\vec{R}(t) = (1+t) \vec{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{t^3}{3} \vec{k}$$

Άσκηση 2. Θεωρούμε την κίνηση που δίδεται από το διάνυσμα θέσης

$$\vec{R}(t) = \vec{i} + 5 \cos t \vec{j} + 3 \sin t \vec{k} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Βρείτε για ποιές τιμές τού t το διάνυσμα ταχύτητας είναι κάθετο στο διάνυσμα επιτάχυνσης.

Άσκηση 3. Θεωρούμε δύο σωματίδια P_1 και P_2 των οποίων η κίνηση δίδεται από τα διανύσματα θέσης (τα s, t δηλώνουν χρόνο)

$$\vec{R}_1(s) = 2s \vec{i} + (s-5) \vec{j} + s \vec{k}, \quad \vec{R}_2(t) = (3+t) \vec{i} - (2+t) \vec{j} + (1+t) \vec{k}$$

(α) Δείξτε ότι οι τροχιές των παραπάνω κινήσεων διασταυρώνονται, όμως ότι τα κινητά δεν συνατοούνται.

(β) Βρείτε ποιά είναι η κοντινότερη απόσταση που έρχονται τα κινητά στην διάρκεια των παραπάνω κινήσεων.

Άσκηση 4. Θεωρούμε την κίνηση στο επίπεδο που δίδεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{R}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \vec{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \vec{j}$. Βρείτε σε ποιά χρονική στιγμή το κινητό έχει την μέγιστη ταχύτητα.

Άσκηση 5. Θεωρούμε την κίνηση στο επίπεδο που δίδεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{R}(t) = e^t \cos t \vec{i} + e^t \sin t \vec{j}$.

α) Δείξτε ότι $\vec{R}''(t) = 2 \vec{R}'(t) - 2 \vec{R}(t)$, για κάθε t .

β) Δείξτε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{R}(t)$ και $\vec{R}''(t)$ παραμένει σταθερή κατά την διάρκεια τής κίνησης.

γ) Βρείτε την παραπάνω γωνία.

Άσκηση 6. Σχεδιάστε στον χώρο τα σχήματα που δίδονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

(α) $2y + z = 1$.

(β) $x + y + z = 1$.

(γ) $x^2 - y^2 = 1$.

(δ) $z = x^2$.

(ε) $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(στ) $x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 8$.

Ασκηση 7. Σχεδιάστε τις ισοσταθμικές καμπύλες για το γράφημα των παρακάτω συναρτήσεων (τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων είναι τα μέγιστα επιτρεπτά).

α) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$.

β) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

γ) $f(x, y) = \cos(xy)$.

δ) $f(x, y) = \sqrt{y}/x$.

ε) $f(x, y) = y/x^2$.

στ) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Ασκηση 8. Βρείτε τις ισοσταθμικές καμπύλες και σχεδιάστε τις επιφάνειες που ορίζονται από τις εξισώσεις

α) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} + z^2 = 1$.

β) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} - z^2 = 1$.

γ) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} - z^2 = -1$.

δ) $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = \frac{x}{4}$.

ε) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

Ασκηση 9. Βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \sqrt{2})} e^{x-y}$.

β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$.

γ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \frac{x^2 - y^2}{x + y + 1}$.

δ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x \sin y}{x^2 + 1}$.

ε) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$.

Ασκηση 10. Δείξτε ότι τα παρακάτω όρια δεν υπάρχουν:

α) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$.

β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x-y+1}{x+y-1}$.

γ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

δ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

ε) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy}$.

στ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|}{xy}$.

ζ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{(x+y)^2}$.

η) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sin(x-y+1)}{x+y-3}$.

θ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)^2}{(x-y)^2} - \frac{y-1}{x-y}$.