ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3

Ασκηση 1. Βρείτε τίς μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ των παρακάτω συναρτήσεων:
α) $f(x,y) = (x+1)(2y-3)$.
β) $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$.
γ) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^4}$.
δ) $f(x,y) = \frac{xy}{xy+1}$.
ε) $f(x,y) = e^x \cos y$.

Ασκηση 2. Έστω ότι $f(x,y) = e^{xy}$. Δείξτε ότι $x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Ασκηση 3. Έστω ότι $f(x,y) = e^x \sin y$. Δείξτε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Ασκηση 4. Βρείτε τίς μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ των παρακάτω συναρτήσεων:
α) $f(x,y,z) = (xz+1)(2y-3)$.
β) $f(x,y) = \frac{z}{x+y}$.

Ασκηση 5. Βρείτε τίς τιμές των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ τής συνάρτησης $f(x,y) = (x+y)e^{2x}$ στο σημείο $(1,2)$.

Ασκηση 6. Βρείτε την εξίσωση τού εφαπτόμενου επιπέδου τού γραφήματος των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που δίδονται:
α) $f(x,y) = (x+1)(2y-3)$ στο σημείο $(1,1,-2)$.
β) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^4}$ στο σημείο $(3,2,5)$.

Ασκηση 7. Δείξτε ότι τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x,y) = x^2+y^2$ και $g(x,y) = -x^2-y^2+xy^3$ έχουν το ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(0,0,0)$.

Ασκηση 8. Δείξτε ότι το διάνυσμα $< 6,3,-1 >$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο τού γραφήματος τής συνάρτησης $f(x,y) = x^2+y^3$ στο σημείο $(3,1,10)$.

Ασκηση 9. Έστω $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Δείξτε, για κάθε (x_0,y_0) στο πεδίο ορισμού, ότι το εφαπτόμενο επίπεδο τού γραφήματος στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $< x_0,y_0,f(x_0,y_0) >$. Μπορείτε να βρείτε γεωμετρική ερμηνεία τού παραπάνω;

Ασκηση 10. Έστω $z(x,y) = x^2+e^{y^2}$ και $x = \sin 2t$, $y = \cos(t^2)$. Βρείτε το $\frac{dz}{dt}$ ως εξής: α) εφαρμόζοντας τον κανόνα τής αλυσίδας, β) αντικαθιστώντας τα x, y στον τύπο τής $z(x,y)$ και παραγωγίζοντας.

Ασκηση 11. Έστω συνάρτηση $z = z(x,y)$ με $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(2,0)} = 1$ και $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(2,0)} = 3$. Έστω ότι $x = e^t + e^{-t}$ και $y = e^t - e^{-t}$. Βρείτε το $\frac{dz}{dt}|_{t=0}$.

Ασκηση 12. Βρείτε τις $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ όπου $w = (x^2 + y + 2)^4 + (x + y - 2)^3$ και $x = u + 2v - 1$, $y = 2u - v + 2$.

Ασκηση 13. Βρείτε τις $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ όπου $w = uv + \ln v$ και $u = x + y^2$, $v = e^x \cos y$.

Ασκηση 14. Βρείτε την $\frac{\partial z}{\partial u}|_{(0,1)}$ όπου $z = \sin(xy) + x \sin y$ και $x = u^2 + v^2$, $y = uv$.

Ασκηση 15. Έστω $z = f(t)$ και $t = \frac{x+y}{xy}$. Δείξτε ότι $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$.

Ασκηση 16. Έστω $z = f(u,v)$ και $u = x + y$, $v = x - y$. Δείξτε ότι $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = (\frac{\partial z}{\partial u})^2 - (\frac{\partial z}{\partial v})^2$.