

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4

Άσκηση 1. Γνωρίζουμε ότι για καλές συναρτήσεις έχουμε $f_{xy} = f_{yx}$. Βρείτε ποιά από τα δύο είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε για τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x, y) = x \sin y + e^y$

β) $f(x, y) = 1/x$

γ) $f(x, y) = y + \frac{x}{y}$

δ) $f(x, y) = x \ln(xy)$

Άσκηση 2. Βρείτε το $\nabla f(P)$ για f και P που δίδονται από:

α) $f(x, y, z) = e^{x+y} \cos z$, $P = (0, 0, \pi/6)$.

β) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, $P = (3, 4)$.

γ) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, $P = (1, 2, -2)$.

Άσκηση 3. Βρείτε ως προς ποιά κατεύθυνση η συνάρτηση $f(x, y) = e^x \cos(\pi x)$ έχει μέγιστη αύξηση στο σημείο $P = (0, -1)$.

Άσκηση 4. Βρείτε την κατά κατεύθυνση παράγωγο της συνάρτησης $f(x, y, z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x$ το σημείο $P = (4, -2, -1)$ ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\frac{1}{\sqrt{14}} \langle 1, 3, 2 \rangle$.

Άσκηση 5. Βρείτε τα εφαπτόμενα επίπεδα των επιφανειών που ορίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις στα δοσμένα σημεία:

α) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ το σημείο $P = (2, -1, -\sqrt{5})$.

β) $\frac{x+y}{xy-1} - z = 0$ το σημείο $P = (1, 2, 3)$.

Άσκηση 6. Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της εφαπτόμενης της καμπύλης που ορίζεται ως η τομή των επιφανειών $xyz = 1$ και $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ στο σημείο $P = (1, 1, 1)$.

Άσκηση 7. Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας $xy + yz + zx - x - z^2 = 0$ όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο προς το xy -επίπεδο.

Άσκηση 8. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία και σε ποιά από αυτά η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο ή έχει σαγματικό σημείο για τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

β) $f(x, y) = xy + yx^5 + xy^5$.

γ) $f(x, y) = \cos(x + y)$.

δ) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

ε) $f(x, y) = e^{1-x^2+y^2}$.

στ) $f(x, y) = x^2 + 2xy$.

Άσκηση 9. Έστω $f(x, y) = ax^2 + by^2$, όπου a, b σταθερές. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f και εξετάστε τότε είναι τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

Άσκηση 10. Βρείτε τα απόλυτα (ολικά) μέγιστα και ελάχιστα τής συνάρτησης $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ στο κλειστό τριγωνικό χωρίο που έχει ως σύνορο τις ευθείες $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$.

Άσκηση 11. Βρείτε τα απόλυτα (ολικά) μέγιστα και ελάχιστα τής συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ στο κλειστό τετραγωνικό χωρίο που έχει ως σύνορο τις ευθείες $x = 0$, $x = 5$, $y = -3$, $y = 0$.

Άσκηση 12. Βρείτε τα απόλυτα (ολικά) μέγιστα και ελάχιστα τής συνάρτησης $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$ στον κλειστό δίσκο με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα 1.