

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Οι ασκήσεις 6-16 είναι ασκήσεις επανάληψης.

Άσκηση 1. Βρείτε τα σημεία τής καμπύλης $x^2 + xy + y^2 = 1$ που είναι πιο κοντά στην αρχή των αξόνων.

Άσκηση 2. Βρείτε την απόσταση τού σημείου $(1, 1, 1)$ από το επίπεδο $x + 2y + 3z = 13$.

Άσκηση 3. Βρείτε τις διαστάσεις ενός κουτιού, σχήματος κύβου χωρίς οροφή, τού οποίου η επιφάνεια είναι 16τμ ώστε να έχει τον μέγιστο όγκο.

Άσκηση 4. Βρείτε τις ακρότατες τιμές τής συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2yz + 1$ πάνω στην καμπύλη που ορίζεται ως η τομή τού επιπέδου $z = 1$ με την επιφάνεια τής σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Άσκηση 5. Βρείτε τις ακρότατες τιμές τής συνάρτησης $f(x, y, z) = x + y + z$ πάνω στην καμπύλη που ορίζεται ως η τομή τού επιπέδου $x + z = 1$ με τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2$.

Άσκηση 6. Εστω (ϵ) η ευθεία που περνάει από το σημείο $(1, 1, 1)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $3x - y + 2z = 4$. Βρείτε το σημείο στο οποίο η (ϵ) τέμνει το επίπεδο $x + 2y + 3z = 20$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι το παρακάτω όριο δεν υπάρχει

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)^2}{(x-y)^2} - \frac{y-1}{x-y}.$$

Άσκηση 8. Εστω $z = z(x, y)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\frac{\partial z}{\partial x}|_P = 5$, $\frac{\partial z}{\partial y}|_P = 1$, όπου $P = (2, 10)$. Εστω ότι $x = t - 1$, $y = t^2 + 1$. Υπολογίστε το $\frac{dz}{dt}|_{t=3}$.

Άσκηση 9. Εστω S η επιφάνεια που ορίζεται από το γράφημα της συνάρτησης $z = x^2 + y^2 - 2$. Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας S όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο με το επίπεδο $5x + y - z = 10$.

Άσκηση 10. Εστω D το κλειστό τρίγωνο (δηλ. το χωρίο του επιπέδου που αποτελείται από το εσωτερικό του τριγώνου και τις τρεις πλευρές του) με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$. Βρείτε τα σημεία του D όπου η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 - xy + y - x$ παίρνει την απόλυτη (δηλ. ολική) μέγιστη και την απόλυτη (δηλ. ολική) ελάχιστη τιμή.

Άσκηση 11. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^2 + 2y^3 + 1$. Εστω (Π) το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της συνάρτησης f στο σημείο $(1, 1, 4)$. Βρείτε το σημείο τομής του επιπέδου (Π) με τον x -άξονα συντεταγμένων.

Άσκηση 12. Εστω D το κλειστό φραγμένο χωρίο του επιπέδου που φράσσεται πάνω από την ευθεία $y = 5$ και κάτω από την παραβολή $y = x^2 - 4$. Βρείτε τα σημεία του D όπου η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 4$ παίρνει την απόλυτη (δηλ. ολική) μέγιστη και την απόλυτη (δηλ. ολική) ελάχιστη τιμή.

Άσκηση 13. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x, y) = \sin(xy)$.

α) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x, y)$.

β) Εξετάσατε την φύση τους (τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα, σαγματικά σημεία). (Υπόδειξη: Στα σημεία στα οποία το κριτήριο της 2ης παραγώγου αποτυγχάνει, προσπαθείστε να βρείτε έναν πιο εύκολο τρόπο για να συμπεράνετε ότι είναι τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο).

Άσκηση 14. Εστω S_1 η επιφάνεια που ορίζεται από το γράφημα της συνάρτησης $z = x^2 + y^2 - 2$ και S_2 η επιφάνεια που ορίζεται από το γράφημα της συνάρτησης $z = x^3 + x^2y - 1$. Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας S_1 όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S_2 στο σημείο $(1, 1, 1)$.

Άσκηση 15. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}$.

α) Βρείτε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x}$.

β) Βρείτε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial y}$ στο σημείο $(0, 3)$.

Άσκηση 16. Υπολογίστε τις κατά κατεύθυνση παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στα δοσμένα σημεία και ως προς τις δοσμένες κατευθύνσεις:

α) $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$, $P = (1, 2)$, $\vec{v} = \langle 3/5, 4/5 \rangle$.

β) $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$, $P = (0, -1)$, $\vec{v} = \langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$.

γ) $f(x, y) = x^y$, $P = (e, e)$, $\vec{v} = \langle 5/13, 12/13 \rangle$.