

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ
10

Σημείωση: Οι ασκήσεις 7β) και 8 αναφέρονται σε θεωρία που θα διδαχθεί την Δευτέρα 4 Ιουνίου.

Άσκηση 1. Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων των οποίων οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) δίδονται από:

- α) $(-3, \pi)$.
- β) $(2, -\pi/3)$.
- γ) $(-3, -\pi/4)$.
- δ) $(-\sqrt{2}, \pi/4)$.
- ε) $(2\sqrt{3}, 2\pi/3)$.

Άσκηση 2. Σχεδιάστε το σύνολο των σημείων τού επιπέδου το οποίο, σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) , ορίζεται από:

- α) $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$.
- β) $-2 \leq r \leq -1, 0 \leq \theta \leq \pi$.
- γ) $r \geq 0, \theta = \pi$.
- δ) $r \leq 0, \theta = \pi/2$.
- ε) $r \cos \theta = 2, 0 \leq \theta \leq \pi$.
- στ) $r \sin \theta = 2, 0 \leq \theta \leq \pi$.
- ζ) $r \cos \theta = 2, \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$.
- η) $r = 2 + \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- θ) $r = -1 + \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- ι) $r = \sin 2\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$.

Άσκηση 3. Με χρήση πολικών συντεταγμένων, υπολογίστε το ολοκλήρωμα τής συνάρτησης $f(x, y)$ με πεδίο ολοκλήρωσης το χωρίο S :

- α) $f(x, y) = x^2 + y^2, S =$ ο μοναδιαίος δίσκος κέντρου $(0, 0)$.
- β) $f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, S =$ ο κυκλικός δακτύλιος που βρίσκεται ανάμεσα στους κύκλους $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 = e^2$.

Άσκηση 4. Με χρήση πολικών συντεταγμένων υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

α)

$$\int_{y=-1}^{y=1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} x^2 + y^2 \, dx dy.$$

β)

$$\int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=y} x \, dx dy.$$

γ)

$$\int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}x} \frac{1}{x^2 + y^2} dy dx.$$

Ασκηση 5. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $r = 1 + \cos \theta$.

Ασκηση 6. Με χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων βρείτε τον όγκο του στερεού που ορίζεται από:

α) Περιβάλλεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ και βρίσκεται ανάμεσα στο επίπεδο $z = -1$ και το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.

β) Περιβάλλεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ και βρίσκεται ανάμεσα στα παραβολοειδή $z = x^2 + y^2$ και $z = x^2 + y^2 + 1$.

γ) Φράσσεται πάνω από το παραβολοειδές $z = 5 - x^2 - y^2$ και κάτω από το παραβολοειδές $z = 4x^2 + 4y^2$.

δ) Φράσσεται πάνω από την σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ και κάτω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.

Ασκηση 7. Το επίπεδο $z = 1$ χωρίζει την σφαίρα κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας 1 σε δύο κομμάτια. Βρείτε τον όγκο των παραπάνω κομματιών με χρήση

α) κυλινδρικών συντεταγμένων.

β) σφαιρικών συντεταγμένων.

Ασκηση 8. Βρείτε τον όγκο του στερεού που σε σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, θ) περιγράφεται ως εξής: βρίσκεται μέσα στην σφαίρα $\rho = 2$ και ανάμεσα στους κώνους $\phi = \pi/3$ και $\phi = 2\pi/3$