

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3

Άσκηση 1. Σχεδιάστε τις ισοσταθμικές καμπύλες για το γράφημα των παρακάτω συναρτήσεων (τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων είναι τά μέγιστα επιτρεπτά).

α) $f(x, y) = \sqrt{x+y}$.

β) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

γ) $f(x, y) = \cos(xy)$.

δ) $f(x, y) = \sqrt{y/x}$.

ε) $f(x, y) = y/x^2$.

στ) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Άσκηση 2. Βρείτε τις ισοσταθμικές καμπύλες και σχεδιάστε τις επιφάνειες που ορίζονται από τις εξισώσεις

α) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} + z^2 = 1$.

β) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} - z^2 = 1$.

γ) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} - z^2 = -1$.

δ) $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = \frac{x}{4}$.

ε) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε την κίνηση στο επίπεδο που δίδεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{R}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \vec{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \vec{j}$. Βρείτε σε ποιά χρονική στιγμή το κινητό έχει την μέγιστη ταχύτητα.

Άσκηση 4. Θεωρούμε την κίνηση στο επίπεδο που δίδεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{R}(t) = e^t \cos t \vec{i} + e^t \sin t \vec{j}$.

α) Δείξτε ότι $\vec{R}''(t) = 2 \vec{R}'(t) - 2 \vec{R}(t)$, για κάθε t .

β) Δείξτε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{R}(t)$ και $\vec{R}''(t)$ παραμένει σταθερή κατά την διάρκεια τής κίνησης.

γ) Βρείτε την παραπάνω γωνία.

Άσκηση 5. Βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \sqrt{2})} e^{x-y}$.

β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$.

γ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \frac{x^2 - y^2}{x + y + 1}$.

δ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x \sin y}{x^2 + 1}$.

ε) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι τα παρακάτω όρια δεν υπάρχουν:

α) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$.

β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x-y+1}{x+y-1}$.

γ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

$$\begin{aligned}\delta) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \\ \varepsilon) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{xy} \cdot \\ \sigma\tau) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|}{xy} \cdot \\ \zeta) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{(x+y)^2} \cdot \\ \eta) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sin(x-y+1)}{x+y-3} \cdot \\ \vartheta) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)^2}{(x-y)^2} - \frac{y-1}{x-y} \cdot\end{aligned}$$