

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4

Άσκηση 1. Βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x, y) = (x + 1)(2y - 3)$.

β) $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$.

γ) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$.

δ) $f(x, y) = \frac{xy}{xy+1}$.

ε) $f(x, y) = e^x \cos y$.

Άσκηση 2. Έστω ότι $f(x, y) = e^{xy}$. Δείξτε ότι $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Άσκηση 3. Έστω ότι $f(x, y) = e^x \sin y$. Δείξτε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Άσκηση 4. Βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x, y, z) = (xz + 1)(2y - 3)$.

β) $f(x, y) = \frac{z}{x+y}$.

Άσκηση 5. Βρείτε τις τιμές των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ της συνάρτησης $f(x, y) = (x + y)e^{2x}$ στο σημείο $(1, 2)$.

Άσκηση 6. Βρείτε την εξίσωση τού εφαπτόμενου επιπέδου τού γραφήματος των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που δίδονται:

α) $f(x, y) = (x + 1)(2y - 3)$ στο σημείο $(1, 1, -2)$.

β) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$ στο σημείο $(3, 2, 5)$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x, y) = x^2 + y^2$ και $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ έχουν το ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(0, 0, 0)$.

Άσκηση 8. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\langle 6, 3, -1 \rangle$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο τού γραφήματος τής συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^3$ στο σημείο $(3, 1, 10)$.

Άσκηση 9. Έστω $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Δείξτε, για κάθε (x_0, y_0) στο πεδίο ορισμού, ότι το εφαπτόμενο επίπεδο τού γραφήματος στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\langle x_0, y_0, f(x_0, y_0) \rangle$. Μπορείτε να βρείτε γεωμετρική ερμηνεία τού παραπάνω;

Άσκηση 10. Έστω $z(x, y) = x^2 + e^{y^2}$ και $x = \sin 2t$, $y = \cos(t^2)$. Βρείτε το $\frac{dz}{dt}$ ως εξής: α) εφαρμόζοντας τον κανόνα τής αλυσίδας, β) αντικαθιστώντας τα x , y στον τύπο τής $z(x, y)$ και παραγωγίζοντας.

Άσκηση 11. Έστω συνάρτηση $z = z(x, y)$ με $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(2,0)} = 1$ και $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(2,0)} = 3$. Έστω ότι $x = e^t + e^{-t}$ και $y = e^t - e^{-t}$. Βρείτε το $\frac{dz}{dt}|_{t=0}$.