ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ #5

Ασκηση 1. Βρείτε τις $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ όπου $w = (x^2 + y + 2)^4 + (x + y - 2)^3$ και $x = u + 2v - 1$, $y = 2u - v + 2$.

Ασκηση 2. Βρείτε τις $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ όπου $w = uv + \ln v$ και $u = x + y^2$, $v = e^x \cos y$.

Ασκηση 3. Βρείτε την $\frac{\partial z}{\partial u}|_{(0,1)}$ όπου $z = \sin(xy) + x \sin y$ και $x = u^2 + v^2$, $y = uv$.

Ασκηση 4. Έστω $z = f(t)$ και $t = \frac{x+y}{xy}$. Δείξτε ότι $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$.

Ασκηση 5. Έστω $z = f(u, v)$ και $u = x + y$, $v = x - y$. Δείξτε ότι $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = (\frac{\partial z}{\partial u})^2 - (\frac{\partial z}{\partial v})^2$.

Ασκηση 6. Βρείτε το $\nabla f(P)$ για f και P που δίδονται από:
α) $f(x, y, z) = e^{x+y} \cos z$, $P = (0, 0, \pi/6)$.
β) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, $P = (3, 4)$.
γ) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, $P = (1, 2, -2)$.

Ασκηση 7. Βρείτε ως προς ποιά κατεύθυνση η συνάρτηση $f(x, y) = e^x \cos(\pi x)$ έχει μέγιστη αύξηση στο σημείο $P = (0, -1)$.

Ασκηση 8. Βρείτε την κατά κατεύθυνση παράγωγο τής συνάρτησης $f(x, y, z) = xy^2 + y^2 z^3 + z^3 x$ το σημείο $P = (4, -2, -1)$ ως πρός την κατεύθυνση τού διανύσματος $\frac{1}{\sqrt{14}} < 1, 3, 2 >$.

Ασκηση 9. Βρείτε τα εφαπτόμενα επίπεδα των επιφανειών που ορίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις στα δοσμένα σημεία:
α) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ το σημείο $P = (2, -1, -\sqrt{5})$.
β) $\frac{x+y}{xy-1} - z = 0$ το σημείο $P = (1, 2, 3)$.

Ασκηση 10. Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις τής εφαπτόμενης τής καμπύλης που ορίζεται ως η τομή των επιφανειών $xyz = 1$ και $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ στο σημείο $P = (1, 1, 1)$.

Ασκηση 11. Βρείτε τα σημεία τής επιφάνειας $xy + yz + zx - x - z^2 = 0$ όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο προς το $xy-$επίπεδο.