

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6

Σημείωση: Οι ασκήσεις 8-10 αναφέρονται σε θεωρία που θα διδαχθεί την Δευτέρα 7 Μαΐου.

Άσκηση 1. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία και σε ποιά από αυτά η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο ή έχει σαγματικό σημείο για τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

β) $f(x, y) = xy + yx^5 + xy^5$.

γ) $f(x, y) = \cos(x + y)$.

δ) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

ε) $f(x, y) = e^{1-x^2+y^2}$.

στ) $f(x, y) = x^2 + 2xy$.

Άσκηση 2. Έστω $f(x, y) = ax^2 + b$, όπου a, b σταθερές. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f και εξετάστε πότε είναι τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

Άσκηση 3. Γνωρίζουμε ότι για καλές συναρτήσεις έχουμε $f_{xy} = f_{yx}$. Βρείτε ποιο από τα δύο είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε για τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x, y) = x \sin y + e^y$

β) $f(x, y) = 1/x$

γ) $f(x, y) = y + \frac{x}{y}$

δ) $f(x, y) = x \ln(xy)$

Άσκηση 4. Βρείτε την $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ όπου $z = f(u, v)$ και $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Η απάντηση πρέπει να είναι έκφραση των u , v , $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Άσκηση 5. Έστω ότι $w = f(u)$, όπου $u = xg(y)$. Δείξτε ότι $w_{xx} = f''(xg(y)) (g(y))^2$.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$ ικανοποιεί την σχέση $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

Άσκηση 7. Για ποιές τιμές τού n η συνάρτηση $f(x, y, z) = (x^1 + y^2 + z^2)^n$ ικανοποιεί την σχέση $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$;

Άσκηση 8. Βρείτε τα απόλυτα (ολικά) μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ στο κλειστό τριγωνικό χωρίο που έχει ως σύνορο τις ευθείες $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$.

Άσκηση 9. Βρείτε τα απόλυτα (ολικά) μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ στο κλειστό τετραγωνικό χωρίο που έχει ως σύνορο τις ευθείες $x = 0$, $x = 5$, $y = -3$, $y = 0$.

Άσκηση 10. Βρείτε τα απόλυτα (ολικά) μέγιστα και ελάχιστα τής συνάρτησης $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$ στον κλειστό δίσκο με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα 1.