

## ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, ΤΜΗΜΑ Τ.Ε.Τ.Υ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ #7

### Ασκήσεις επανάληψης

**Άσκηση 1.** Εστω  $(\epsilon)$  η ευθεία που περνάει από το σημείο  $(1, 1, 1)$  και είναι κάθετη στο επίπεδο  $3x - y + 2z = 4$ . Βρείτε το σημείο στο οποίο η  $(\epsilon)$  τέμνει το επίπεδο  $x + 2y + 3z = 20$ .

**Άσκηση 2.** Δείξτε ότι το παρακάτω όριο δεν υπάρχει

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)^2}{(x-y)^2} - \frac{y-1}{x-y}.$$

**Άσκηση 3.** Εστω  $z = z(x, y)$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με  $\frac{\partial z}{\partial x}|_P = 5$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}|_P = 1$ , όπου  $P = (2, 10)$ . Εστω ότι  $x = t - 1$ ,  $y = t^2 + 1$ . Υπολογίστε το  $\frac{dz}{dt}|_{t=3}$ .

**Άσκηση 4.** Εστω  $S$  η επιφάνεια που ορίζεται από το γράφημα της συνάρτησης  $z = x^2 + y^2 - 2$ . Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας  $S$  όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο με το επίπεδο  $5x + y - z = 10$ .

**Άσκηση 5.** Εστω  $D$  το κλειστό τρίγωνο (δηλ. το χωρίο του επιπέδου που αποτελείται από το εσωτερικό του τριγώνου και τις τρεις πλευρές του) με κορυφές τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(0, 3)$ . Βρείτε τα σημεία του  $D$  όπου η συνάρτηση  $f(x, y) = x^2 - xy + y - x$  παίρνει την απόλυτη (δηλ. ολική) μέγιστη και την απόλυτη (δηλ. ολική) ελάχιστη τιμή.

**Άσκηση 6.** Θεωρούμε την συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y) = x^2 + 2y^3 + 1$ . Εστω  $(\Pi)$  το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $(1, 1, 4)$ . Βρείτε το σημείο τομής του επιπέδου  $(\Pi)$  με τον  $x$ -άξονα συντεταγμένων.

**Άσκηση 7.** Εστω  $D$  το κλειστό φραγμένο χωρίο του επιπέδου που φράσσεται πάνω από την ευθεία  $y = 5$  και κάτω από την παραβολή  $y = x^2 - 4$ . Βρείτε τα σημεία του  $D$  όπου η συνάρτηση  $f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 4$  παίρνει την απόλυτη (δηλ. ολική) μέγιστη και την απόλυτη (δηλ. ολική) ελάχιστη τιμή.

**Άσκηση 8.** Θεωρούμε την συνάρτηση  $f(x, y) = \sin(xy)$ .

α) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της  $f(x, y)$ .

β) Εξετάσατε την φύση τους (τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα, σαγματικά σημεία). (Υπόδειξη: Στα σημεία στα οποία το κριτήριο της 2ης παραγώγου αποτυγχάνει, προσπαθείστε να βρείτε έναν πιο εύκολο τρόπο για να συμπεράνετε ότι είναι τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο).

**Άσκηση 9.** Εστω  $S_1$  η επιφάνεια που ορίζεται από το γράφημα της συνάρτησης  $z = x^2 + y^2 - 2$  και  $S_2$  η επιφάνεια που ορίζεται από το γράφημα της συνάρτησης  $z = x^3 + x^2y - 1$ . Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας  $S_1$  όπου το εφαπτόμενο επίπεδο

είναι παράλληλο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας  $S_2$  στο σημείο  $(1, 1, 1)$ .

**Άσκηση 10.** Θεωρούμε την συνάρτηση  $f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}$ .

α) Βρείτε την μερική παράγωγο  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

β) Βρείτε την μερική παράγωγο  $\frac{\partial f}{\partial y}$  στο σημείο  $(0, 3)$ .

**Άσκηση 11.** Υπολογίστε τις κατά κατεύθυνση παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στα δοσμένα σημεία και ως προς τις δοσμένες κατευθύνσεις:

α)  $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$ ,  $P = (1, 2)$ ,  $\vec{v} = \langle 3/5, 4/5 \rangle$ .

β)  $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$ ,  $P = (0, -1)$ ,  $\vec{v} = \langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$ .

γ)  $f(x, y) = x^y$ ,  $P = (e, e)$ ,  $\vec{v} = \langle 5/13, 12/13 \rangle$ .