

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, Τ.Ε.Τ.Υ.
ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2007
18 Ιουνίου 2007, Διδάσκων: Α. Κουβιδάκης

Πρόβλημα 1. [Μονάδες 5] Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x, y) = (y + x)e^{y+x^2}$. Βρείτε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x}$ τής συνάρτησης f .

Πρόβλημα 2. [Μονάδες 10] Υπολογίστε το ακόλουθο όριο, αν υπάρχει (αν δεν υπάρχει, δικαιολογήστε το):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Πρόβλημα 3. [Μονάδες 10] Εστω ότι $z = z(x, y)$ και έστω $x = s + t$ και $y = s - t$. Δείξτε ότι:

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t} = 2 \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Πρόβλημα 4. [Μονάδες 15] Εστω D το κλειστό φραγμένο χωρίο του επιπέδου που φράσσεται πάνω από την ευθεία $y = 5$ και κάτω από την παραβολή $y = x^2 - 4$. Βρείτε τα σημεία του D όπου η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 - y$ παίρνει την ολική (απόλυτη) μέγιστη και την ολική (απόλυτη) ελάχιστη τιμή.

Πρόβλημα 5. [Μονάδες 15] Χρησιμοποιήστε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για να βρείτε τις ακρότατες τιμές τής συνάρτησης $f(x, y) = x + 2y$ πάνω στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

Πρόβλημα 6. [Μονάδες 15] Με χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων, βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από το επίπεδο $z = 3$ και την επιφάνεια $z = 7 - x^2 - y^2$ (το στερεό βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $z = 3$ και κάτω από την επιφάνεια $z = 7 - x^2 - y^2$).

Πρόβλημα 7. [Μονάδες 15] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{x=0}^{x=6} \int_{y=x/3}^{y=2} x \sqrt{y^3 + 1} \, dy \, dx$$

Πρόβλημα 8. [Μονάδες 15] Ολοκληρώστε την συνάρτηση $f(x, y) = 2x + y$ πάνω από το χωρίο που ορίζεται ως το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0, 1)$, $(-1, 2)$, $(1, 2)$.