ΠΡΟΟΔΟΣ - ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, Τ.Ε.Τ.Υ.

16 Μαίου 2007, Διδάσκων: Α. Κουβιδάκης

Πρόβλημα 1. **α)** [Μονάδες 5] Έστω $\mathrm{f}(x, y) = xe^{1+x^2y}$. Βρείτε την μερική παράγωγο $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}$.

β) [Μονάδες 15] Έστω $z = z(t)$ και $t = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. Δείξτε ότι

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0\ .$$

Πρόβλημα 2. [Μονάδες 20] Εστω (ϵ) η ευθεία που περνάει από το σημείο $(1, 1, 1)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $3x - y + 2z = 4$. Βρείτε το σημείο στο οποίο η (ϵ) συναντά το επίπεδο $x + 2y + 3z = 20$.

Πρόβλημα 3. [Μονάδες 15] Υπολογίστε το ακόλουθο όριο, άν υπάρχει (αν δεν υπάρχει, δικαιολογίστε το):

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-y-1)^2}{(x-1)^2+y^2}\ .$$

Πρόβλημα 4. [Μονάδες 25] Βρείτε όλα τα σημεία τής επιφάνειας που ορίζεται από την εξίσωση $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12$, όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο πρός το επίπεδο $x + 4y - 3z = 10$.

Πρόβλημα 5. [Μονάδες 20] Βρείτε τα κρίσιμα σημεία και σε ποιά από αυτά η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ έχει τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο ή έχει σαγματικό σημείο.