ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. Έστω $\mathbb{Z}_m$ τό σύνολο τών ακεραίων modulo m, τά στοιχεία τού οποίου συμβολίζουμε ως $\bar{a}$, $a \in \mathbb{Z}$. Βρείτε τόν ακέραιο r με $0 \leq r \leq m-1$ για τόν οποίο έχουμε:
α) $\overline{126} = \bar{r}$ στο $\mathbb{Z}_{12}$.
β) $\overline{-1} = \bar{r}$ στο $\mathbb{Z}_{12}$.
γ) $\overline{-20} = \bar{r}$ στο $\mathbb{Z}_8$.
δ) $\overline{-200} = \bar{r}$ στο $\mathbb{Z}_9$.

Πρόβλημα 2. Βρείτε τήν κυκλική υποομάδα τής πολλαπλασιαστικής ομάδας τών 4×4 αντιστρεψίμων πινάκων, τήν οποία παράγει (χωριστά) καθένας από τούς παρακάτω πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Πρόβλημα 3. α) Ποιά η τάξη τής υποομάδας τής $\mathbb{Z}_{30}$ που έχει ως γεννήτορα τό $\overline{25}$;
β) Ποιά η τάξη τής υποομάδας τής $\mathbb{Z}_{42}$ που έχει ως γεννήτορα τό $\overline{30}$;

Πρόβλημα 4. Εστω $\mathbb{C}^\star$ η πολλαπλασιαστική ομάδα τών μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Βρείτε τήν τάξη τών κυκλικών υποομάδων τής $\mathbb{C}^\star$ που παράγονται από τά στοιχεία: i, $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $1+i$. Σε κάθε μιά από τίς παραπάνω περιπτώσεις βρείτε όλους τούς γεννήτορες τών κυκλικών υποομάδων.

Πρόβλημα 5. Στην ομάδα S_8 (η ομάδα μεταθέσεων τών 8 στοιχείων) θεωρούμε τήν μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.
α) Βρείτε τήν αντίστροφη μετάθεση σ^{-1}.
β) Βρείτε τήν τάξη $\operatorname{ord}(\sigma)$ τής σ.
γ) Υπολογίστε τήν μετάθεση σ^{154} και σ^{-154}.

Πρόβλημα 6. Βρείτε τό πλήθος τών στοιχείων τού συνόλου $\{\sigma \in S_5 \text{ με } \sigma(3) = 4\}$.

Πρόβλημα 7. Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα και $g \in G$ στοιχείο τάξεως n.
α) Αποδείξτε ότι η σχέση $g^a = e$, όπου e τό ουδέτερο στοιχείο, και a ακέραιος, ισοδυναμεί με τό ότι ο a είναι πολλαπλάσιο τού n.
β) Αποδείξτε ότι η σχέση $g^a = g^b$, όπου a, b ακέραιοι, ισοδυναμεί με τό ότι ο $a - b$ είναι πολλαπλάσιο τού n.

Πρόβλημα 8. Στην ομάδα S_8 βρείτε τις τροχιές τής μετάθεσης $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Γράψτε τήν σ ως γινόμενο ξένων κύκλων και, επίσης, ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Πρόβλημα 9. Στην ομάδα S_6 εκφράστε κάθε μιά από τις παρακάτω μεταθέσεις ως γινόμενο ξένων κύκλων:
α) $(13)\,(23)$.
β) $(16)\,(26)\,(36)\,(46)\,(56)$.
γ) $(12345)\,(16)$.

Πρόβλημα 10. Θεωρούμε τήν ομάδα S_n.
α) Εστω $s \leq n$. Βρείτε τή αντίστροφο τού στοιχείου $(12 \ldots s)$.
β) Εστω $\tau = (1234)$. Βρείτε τήν τάξη τού στοιχείου τ. Εκφράστε τά τ^2, τ^3 ως γινόμενα ξένων κύκλων.
γ) Ποιά είναι η τάξη τού στοιχείου $\gamma = (12345)(567)$

Πρόβλημα 11. Εξετάστε αν η παρακάτω μετάθεση σ είναι άρτια ή περιττή:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & 9 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$