ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Πρόβλημα 1. Στην ομάδα $\mathbb{S}_4$, θεωρούμε τό υποσύνολο $H = \{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$.
α) Δείξτε ότι η H είναι υποομάδα τής $\mathbb{S}_4$ και μάλιστα αβελιανή.
β) Γράψτε τά αριστερά σύμπλοκα τής H στην $\mathbb{S}_4$.

Πρόβλημα 2. Στην ομάδα $\mathbb{S}_4$ βρείτε τήν κυκλική υποομάδα $H = \langle(1324)\rangle$ και τά αριστερά και δεξιά σύμπλοκα τής H στην $\mathbb{S}_4$.

Πρόβλημα 3. Στην ομάδα $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ βρείτε τήν κυκλική υποομάδα $H = \langle\bar{6}\rangle$ και τά αριστερά (που συμπίπτουν με τά δεξιά) σύμπλοκα τής H στην $\mathbb{Z}_{18}$.

Πρόβλημα 4. Έστω ομάδα G, τής οποίας η τάξη είναι pq, όπου p, q πρώτοι αριθμοί. Δείξτε ότι κάθε υποομάδα H τής G, με $H \neq G$, είναι κυκλική.

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε ότι, αν μία ομάδα G έχει δύο, τουλάχιστον, στοιχεία και οι μόνες υποομάδες της είναι η G και η $\{e\}$, τότε η ομάδα είναι πεπερασμένη και η τάξη της είναι πρώτος αριθμός (*Υπόδειξη:* πάρτε ένα στοιχείο $a \neq e$ τής ομάδας και εξετάστε τήν κυκλική υποομάδα $< a >$).

Πρόβλημα 6. Εστω G ομάδα και H υποομάδα τής G με δείκτη $[G : H] = 2$. Να αποδειχθεί ότι $a^2 \in H$, γιά κάθε $a \in G$.

Πρόβλημα 7. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, εξετάστε άν η απεικόνιση, που δίνεται, είναι ομομορφισμός. Στην περίπτωση που είναι ομομορφισμός βρείτε τόν πυρήνα του και τήν εικόνα του.

1. Ὁμάδες $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ και $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τήν σχέση $\phi(n) = -2n$.
2. Ομάδες $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +)$ και $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, οριζόμενη από τήν σχέση $\phi(x) = [x]$.
3. Ομάδα $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $\phi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τήν σχέση $\phi(x) = |x|$.
4. Ομάδα $(G, \star)$ και $\phi : G \longrightarrow G$, οριζόμενη από τήν σχέση $\phi(g) = g^{-1}$.
5. Ομάδες $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τήν σχέση $\phi(x) = e^x$.
6. Ομάδες $(\mathbb{Z}_6, +), (\mathbb{Z}_2, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τήν σχέση $\phi(\bar{a}_6) = \bar{a}_2$.
7. Ομάδες $(\mathbb{Z}_9, +), (\mathbb{Z}_2, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_9 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τήν σχέση $\phi(\bar{a}_9) = \bar{a}_2$.
8. Ομάδες $(\mathbb{Z}_{20}, +), (\mathbb{Z}_{12}, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_{20} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$, οριζόμενη από τήν σχέση $\phi(\bar{a}_{20}) = 3\bar{a}_{12}$.
9. Ομάδες $(F, +), (\mathbb{R}, +)$, όπου F τό σύνολο τών συνεχών συναρτήσεων από τό $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και $\phi : F \longrightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τήν σχέση $\phi(f) = \displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Πρόβλημα 8. Έστω $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ ομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι:
α) $\forall a \in G_1$ έχομε $\mathrm{ord}(\phi(a)) \mid \mathrm{ord}(a)$.
β) Αν, επιπλέον ο ϕ είναι ισομορφισμός, τότε δείξτε ότι $\mathrm{ord}(\phi(a)) = \mathrm{ord}(a)$.

Πρόβλημα 9. Στην κυκλική ομάδα $\mathbb{U}_n$ τών n-στών ριζών τής μονάδας, βρείτε γιά $n = 328$, τήν τάξη τού στοιχείου $a = e^{\frac{59\pi i}{82}}$ (βεβαιωθείτε πρώτα ότι τό a είναι στοιχείο τής ομάδας $\mathbb{U}_{328}$).