ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #3

Πρόβλημα 1. α) Βρείτε τήν τάξη τού στοιχείου $(\bar{8}, \bar{2}) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_3$.
β) Βρείτε την τάξη τής ομάδας $G = (\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_4)/ < (\bar{6}, \bar{2}) >$.
γ) Βρείτε την τάξη τού στοιχείου $\overline{(\bar{4}, \bar{3})}$ τής ομάδας G τού ερωτήματος β).

Πρόβλημα 2. α) Δείξτε ότι $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6)/ < (\bar{0}, \bar{2}) > \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6$.
β) Δείξτε ότι $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/ < (\bar{0}, \bar{2}) > \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.
γ) Δείξτε ότι $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/ < (\bar{2}, \bar{2}) > \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S$, όπου $S = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} \leq \mathbb{C}^*$.

Πρόβλημα 4. Έστω H κανονική υποομάδα τής G.
α) Δείξτε ότι η τάξη ενός στοιχείου $\bar{a} \in G/H$ είναι ο μικρότερος φυσικός n με $a^n \in H$.
β) Έστω ότι η τάξη τής G/H είναι m. Δείξτε ότι για κάθε $a \in G$ έχουμε ότι $a^m \in H$.

Πρόβλημα 5. α) Δείξτε ότι η τομή δύο κανονικών υποονάδων μιας ομάδας G είναι κανονική υποομάδας τής G.
β) Δείξτε ότι αν N είναι κανονική υποομάδα τής G και H μια υποομάδα τής G τότε $N \cap H$ είναι κανονική υποομάδα τής H.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{με } f(x) = ax + b, \;\; a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$$

τών αφινικών μετασχηματισμών τού $\mathbb{R}$ είναι ομάδα με πράξη τήν σύνθεση. Ποιά είναι η αντίστροφη τής f με $f(x) = ax + b$;
β) Δείξτε ότι το υποσύνολο $N = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{με } f(x) = x + b, \quad b \in \mathbb{R}\}$ είναι κανονική υποομάδα της A.
γ) Δείξτε ότι $A/N \cong \mathbb{R}^*$.

Πρόβλημα 7. Λύστε από τό βιβλίο τίς προτεινόμενες ασκήσεις ΠΑ 58, ΠΑ 61, ΠΑ 76, ΠΑ 86, ΠΑ 87 (για τήν τελευταία δείξτε πρώτα ότι οι γεννήτορες στίς ομάδας $\mathbb{Z}_n$ είναι τα $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ με $(a, n) = 1$).