ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4

Πρόβλημα 1. Με πόσους ουσιαστικά διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τίς πλευρές ενός τετραγώνου όταν διαθέτουμε 10 διαφορετικά χρώματα. Βρείτε πρώτα την ομάδα συμμετριών τού τετραγώνου (έχει οκτώ στοιχεία).

Πρόβλημα 2. Έστω ότι μία πεπερασμένη ομάδα με τάξη p^i, p =πρώτος, δρά σε ένα πεπερασμένο σύνολο X με p δεν διαιρεί τό $\#X$. Δείξτε ότι η δράση έχει σταθερό σημείο, δηλ. υπάρχει $x \in X$ με $Gx = \{x\}$.

Πρόβλημα 3. Έστω $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ και έστω $X = I_n \times I_n$. Θεωρούμε την δράση $\mathbb{S}_n \times X \to X$ με $\sigma(i,j) = (\sigma(i), \sigma(j))$. Βρείτε τίς τροχιές τής παραπάνω δράσης.

Πρόβλημα 4. Θεωρούμε τήν ομάδα $G = \mathbb{R}$ τών πραγματικών με πράξη τήν πρόσθεση και έστω $X = \mathbb{R}^2$ τό επίπεδο. Δείξτε ότι η $G \times X \to X$ που ορίζετα ως $(x \in \mathbb{R},\ (a,b) \in X)$

$$x \star (a,b) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ορίζει δράση τού $\mathbb{R}$ στο X. Ποιές είναι οι τροχιές τής δράσης. Αν $x = (a,b) \in X$, βρείτε τήν G_x.

Πρόβλημα 5. α) Βρείτε τό σύνολο $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ τών αυτομορφισμών τής ομάδας $\mathbb{Z}_n$ και δείξτε ότι είναι ομάδα τάξης $\phi(n)$ (η συνάρτηση Euler). Για κάθε m με $(m,n) = 1$ και $1 \leq m \leq n$, ο αντίστοιχος αυτομορφισμός είναι ο ϕ_m με $\phi_m(\bar{a}) = \overline{ma}$.
β) Θεωρείστε την φυσιολογική δράση $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ με $\phi \star \bar{a} = \phi(\bar{a})$. Βρείτε τίς τροχιές τής παραπάνω δράσης για $n = 7, n = 10, n = 12$.
γ) Θέτουμε $X = \mathbb{Z}_n$. Δείξτε ότι $\#X_{\phi_m}$ =μκδ$(m-1, n)$.
δ) Βρείτε τό πλήθος r τών τροχιών τής δράσης με τήν χρήση τού θεωρήματος τού Burnside. Πάρτε κάποιες συγκεκριμμένες τιμές τού n (πχ $n = 20, 27, 32$) και δείτε ότι r =τό πλήθος των διαιρετών τού n.

Πρόβλημα 6. Λύστε από τό βιβλίο τίς προτεινόμενες ασκήσεις ΠΑ 102, ΠΑ 103