

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙΙ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2010-11
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 1

Άσκηση 1. Είναι τα πολυώνυμα $x - 1$, $x + 2$, $x^2 - 1$ γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του K -διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων $K[x]$ (K =σώμα)?

Άσκηση 2. Βρείτε μια βάση του υπόχωρου του \mathbb{R}^3 που παράγεται από τα διανύσματα $\langle 3, 2, 4 \rangle$, $\langle 2, 1, 3 \rangle$, $\langle 5, 4, 6 \rangle$.

Άσκηση 3. α) Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{(x - y, 2x + 3y, x + 4y), x, y \in \mathbb{R}\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του \mathbb{R}^3 .

β) Βρείτε μια βάση και την διάσταση του A .

Άσκηση 4. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι διανυσματικοί υπόχωροι του \mathbb{R}^3 ?

α) $A = \{(x - y, x + y + 1, y), x, y \in \mathbb{R}\}$.

β) $B = \{(x, y + 2, 3x), x, y \in \mathbb{R}\}$.

Άσκηση 5. α) Δείξτε ότι το σύνολο των συμμετρικών 3×3 πινάκων με στοιχεία στο \mathbb{R} είναι ένας \mathbb{R} -γραμμικός χώρος και βρείτε μία βάση του.

β) Ομοίως για το σύνολο των αντισυμμετρικών 3×3 πινάκων με στοιχεία στο \mathbb{R} .

Άσκηση 6. Έστω $M_2(\mathbb{R})$ το σύνολο των 2×2 πινάκων με στοιχεία στο \mathbb{R} . Δείξτε ότι το σύνολο

$$\{A \in M_2(\mathbb{R}), A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A\}$$

είναι ένας \mathbb{R} -γραμμικός χώρος και βρείτε μία βάση του.

Άσκηση 7. Έστω $K[x]_{\leq n}$ ο K -διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων μιάς μεταβλητής με συντελεστές στο σώμα K και βαθμού $\leq n$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{f(x) \in K[x]_{\leq n}, x^2 + 1 \mid f(x)\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $K[x]_{\leq n}$ και βρείτε μια βάση του.

Άσκηση 8. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με πίνακα

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

ως προς τις βάσεις $\{\langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 0, 0, 1 \rangle\}$, $\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$ των \mathbb{R}^3 και \mathbb{R}^2 αντίστοιχα. Βρείτε τον τύπο της απεικόνισης, δηλ. το $\phi(x, y, z)$, όπου $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Άσκηση 9. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

α) $\phi_1 : K[x]_{\leq n} \rightarrow K[x]_{\leq n-1}$ με $\phi_1(f) = f'$.

β) $\phi_2 : K[x]_{\leq n} \rightarrow K[x]_{\leq n+1}$ με $\phi_2(f) = \int f dx$.

Επιλέγοντας βάσεις για τους παραπάνω χώρους, βρείτε τους αντίστοιχους πίνακες των απεικονίσεων.

Άσκηση 10. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : K[x]_{\leq n} \rightarrow K[x]_{\leq n-1}$ με $\phi[f(x)] = f(x+1) - f(x)$ είναι γραμμική. Επιλέγοντας βάσεις για τους παραπάνω χώρους, βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης.